



نامعادلات

۱۹۸- نامعادلات گویای زیر را حل کنید و مجموعه جواب آن‌ها را به صورت بازه نمایش دهید.

$$۱) \frac{2x-3}{1-x} \geq 0$$

$$۲) \frac{1}{x-1} < \frac{1}{x}$$

$$۳) 1 - \frac{2}{x} \leq 3$$

$$۴) \frac{3x+4}{x} < 1$$

$$۵) \frac{6-x^2}{x} > 1$$

$$۶) \frac{x^2-6}{x+1} \leq 2$$

۱۹۹- حدود x را طوری تعیین کنید که عبارت $A = \frac{-3x^2 + 5x - 2}{x^2 - 4}$ مثبت باشد.

۲۰۰- حدود x را طوری تعیین کنید که عبارات زیر، با معنی باشند.

$$۱) \sqrt{\frac{4-x}{x+2}} - 1$$

$$۲) \sqrt{\frac{-x^2+x-2}{x^2+x-2}}$$

۲۰۱- مجموعه جواب هر یک از معادلات زیر را مشخص کنید.

$$۱) 2\sqrt{2-x} - 6 \leq 0$$

$$۲) \sqrt{3-x} - \sqrt{2x-2} \geq 0$$

$$۳) \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}} < 1$$

$$۴) \sqrt{3x+10} < x+2$$

۲۰۲- مجموعه‌ی تمام نقاط روی محور اعداد حقیقی را تعیین کنید که فاصله‌ی آن‌ها از عدد ۱ کم‌تر از ۳ باشد.

۲۰۳- مجموعه جواب نامعادلات قدرمطلق زیر را به دست آورید.

$$۱) |2x-3| \leq 1$$

$$۲) |5-3x| > 7$$

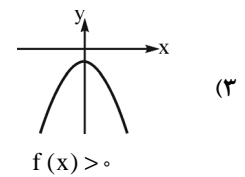
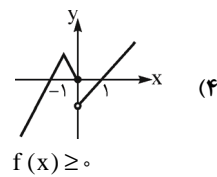
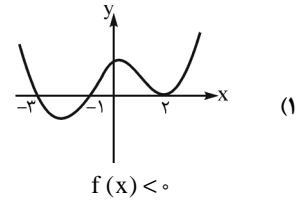
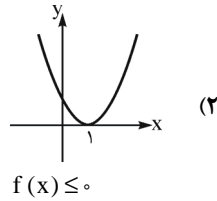
$$۳) |2x+1| < |x+3|$$

$$۴) x - |x| < 0$$

$$\begin{cases} \frac{3x-2}{x+1} > 4 \\ 6x^2+x > 1 \end{cases}$$

۲۰۴- دستگاه نامعادلات روبه‌رو را حل کنید.

۲۰۵- در هر یک از حالت‌های زیر نمودار تابع f داده شده است. مجموعه جواب نامعادله‌ی داده‌شده را تعیین کنید.



۲۰۶- مجموعه جواب نامعادلات زیر را تعیین کنید.

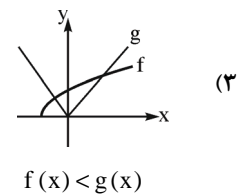
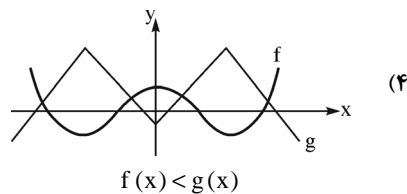
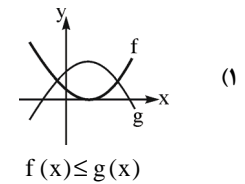
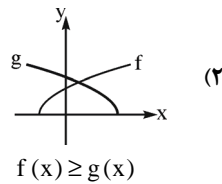
۱) $x^2 - x - 6 \leq 0$

۲) $x + 7 - 2x^2 \geq (x + 3)^2$

۳) $(x^2 + 2x + 4)(1 - x)(x + 2) > 0$

۴) $x(x + 1) \geq 6(x - 1)$

۲۰۷- در هر یک از موارد زیر، نمودار تابع f و g رسم شده است. قسمتی از محور x ها را که به ازای آن، نامعادلات داده‌شده برقرار هستند، سایه بزنید.



۲۰۸- نامعادلات زیر را به روش هندسی (رسم نمودار) حل کنید.

۱) $x^2 \leq x + 2$

۲) $|x - 1| < \sqrt{x + 1}$

$$۳) \sqrt{x+2} \geq \sqrt{1-x}$$

$$۴) \frac{1}{x} \geq \sqrt{x}$$



نامعادلات

۲۰۹- نامعادلات زیر را حل کنید.

$$۱) (\frac{1}{5})^{x^2-3x+1} \geq (\frac{1}{5})^{2x-3}$$

$$۲) x(x+1)(x+2)(x+3) < ۸$$

$$۳) -1 < \frac{2x-1}{x-2} < 1$$

$$۴) \frac{3}{1-x} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{x+2}{1-x^2}$$

۲۱۰- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های تابع درجه دوم $f(x) = 2x^2 + mx - 1$ باشند، حدود m را طوری تعیین کنید که رابطه‌ی $2 < x_2 < 1 < x_1$ برقرار باشد.

۲۱۱- نامعادلات زیر را حل کنید.

$$۱) x \leq \sqrt{x^2-9}$$

$$۲) \sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}} < \frac{1}{x}-\frac{1}{2}$$

$$۳) \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} \geq 1$$

۲۱۲- نامعادلات قدرمطلق زیر را حل کنید.

$$۱) ||x-2|-4| \leq 1$$

$$۲) |2x-3| < x$$

$$۳) |2x+1| < x+1$$

$$۴) |x| + |x-1| \leq 2$$

$$۵) |x+2| - |x-1| > x$$

$$۶) |2x-1| \leq \sqrt{x+1}$$

$$۷) |x-2| > \sqrt{x}$$

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x} - \frac{x}{x-1} \geq 4 \\ \sqrt{x+3} \geq 2 \\ 2\sqrt{x+1} \end{cases}$$

۲۱۳- دستگاه نامعادلات روبه‌رو را حل کنید.

۲۱۴- نامعادلات زیر را به روش هندسی (رسم نمودار) حل کنید و مجموعه جواب را روی محور مشخص کنید.

۱) $|x-1| \leq 1-x^2$

۲) $3-|x+1| < x^2$

۳) $x^2 \leq 2^x$

۴) $\sqrt{2-x} - \sqrt{x} < 1$

۵) $\sqrt{x+1} < |x-1| - 1$

۲۱۵- حدود x را طوری تعیین کنید که عبارت $\sqrt{\frac{|2x-1|}{x^2-x-2}} - \frac{1}{2}$ بامعنی باشد.

۲۱۶- حدود x را طوری بیابید که نمودار تابع $y = ||x|-2|$ زیر نمودار $y = \sqrt{x^2-4}$ قرار گیرد.



سؤالات تکمیلی

۲۱۷- اگر S_n مجموع n جمله‌ی اول و a_n جمله عمومی یک دنباله‌ی حسابی باشد و داشته باشیم $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$ ، ثابت کنید $\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$.

۲۱۸- در یک دنباله‌ی حسابی مجموع n جمله‌ی اول، با مجموع m جمله‌ی اول مساوی است ($m \neq n$). ثابت کنید در این دنباله $S_{m+n} = 0$.

۲۱۹- اگر S_n, S_{2n}, S_{3n} به ترتیب مجموع $n, 2n$ و $3n$ جمله از یک دنباله‌ی حسابی باشند، ثابت کنید $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$.

۲۲۰- بعضی از جملات دنباله‌های روبه‌رو مساوی یکدیگرند. مجموع صد جمله از این جملات مساوی را به دست آورید.

۱۷, ۲۱, ۲۵, ۲۹, ...

۱۶, ۲۱, ۲۶, ۳۱, ...

۲۲۱- حداقل چند جمله از دنباله‌ی هندسی زیر را باید انتخاب کنیم تا اختلاف مجموع آن‌ها با حد مجموع بی‌نهایت جمله‌ی دنباله، کم‌تر از 0.1 باشد؟

$8, 7, \frac{49}{8}, \dots$

۲۲۲- هرگاه S_1, S_2, S_3 به ترتیب مجموع n_1, n_2, n_3 جمله‌ی متوالی اول یک دنباله‌ی حسابی باشند، ثابت کنید:

$$\frac{S_1(n_2 - n_3)}{n_1} + \frac{S_2(n_3 - n_1)}{n_2} + \frac{S_3(n_1 - n_2)}{n_3} = 0$$

۲۳۳- با چه شرطی عبارت $A = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n}$ بر $B = 1 + x + \dots + x^n$ بخش پذیر است؟ (راهنمایی: ابتدا به کمک فرمول، مجموع دنباله‌ی هندسی A و B را ساده کنید).

۲۳۴- ثابت کنید عبارت $P(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n + 1$ بر $(x-1)^2$ بخش پذیر است.

۲۳۵- اگر باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)$ و $g(x)$ بر $x^2 - x$ به ترتیب $x+2$ و $2x-1$ باشد، باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)g(x)$ را بر $x^2 - x$ تعیین کنید.

۲۳۶- a, b, c را به گونه‌ای تعیین کنید که چندجمله‌ای $x^5 + ax^2 + bx + c$ بر $(x+1)^3$ بخش پذیر باشد. خارج قسمت تقسیم را تعیین کنید. (راهنمایی: توجه کنید که خارج قسمت به صورت $x^2 + mx + n$ است. با نوشتن رابطه‌ی تقسیم a, n, m, b, c را تعیین کنید).

۲۳۷- اگر $p(x) = ax^2 + bx + c$ ، $p(\alpha) = \beta$ و $p(\beta) = \alpha$ باشد، ثابت کنید چندجمله‌ای $a^2x^2 + a(b+1)x + ac + b + 1$ بر $x^2 - Sx + P$ بخش پذیر است که در آن $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$.

۲۳۸- اگر چندجمله‌ای $ax^3 + bx + c$ بر $x^2 + tx + 1$ بخش پذیر باشد، ثابت کنید $a^2 - c^2 = ab$.

۲۳۹- بدون نوشتن جملات اضافی، ضریب x^2 را در عبارت زیر به دست آورید.

$$A = (1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \dots + (1+x)^{20}$$

(راهنمایی: ابتدا به کمک دنباله‌ی هندسی A را ساده کنید).

۲۴۰- به کمک بسط دوجمله‌ای، تعیین کنید کدام یک از اعداد 5^{Δ_1} و 51^{Δ_2} بزرگ است.

۲۴۱- x را چنان تعیین کنید که جمله‌ی چهارم بسط $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^6$ برابر 200 باشد.

۲۴۲- ضریب جمله‌ی سوم بسط $(\sqrt{x} - \sqrt[4]{x^{-\Delta}})^n$ ، 77 واحد از ضریب جمله‌ی دوم آن بیشتر است. جمله‌ی مستقل از x این بسط را به دست آورید.

۲۴۳- اگر n کوچک ترین عدد طبیعی باشد به گونه‌ای که ضریب دو جمله‌ی متوالی بسط $(\frac{a}{\sqrt{x}} + \sqrt{x})^n$ برابر $\frac{11}{2}$ باشد، n و پنجمین جمله‌ی این بسط را تعیین کنید.

۲۴۴- به کمک بسط دوجمله‌ای، تساوی روبه‌رو را ثابت کنید:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = \binom{2n}{n}$$

۲۴۵- دو محلول اسید سولفوریک در دو ظرف A و B موجود است. در ظرف A، ۸/۰ کیلوگرم و در ظرف B، ۶/۰ کیلوگرم اسید خالص وجود دارد. این دو محلول را با هم مخلوط کرده و در ظرف خالی C می‌ریزیم. در این صورت ۱۰ کیلوگرم محلول اسید سولفوریک در ظرف C به دست می‌آید. (۱) اگر در محلول ظرف A، ۱۰ درصد بیشتر از محلول ظرف B اسید سولفوریک خالص موجود باشد، وزن هر یک از محلول‌های ظرف A و B را تعیین کنید.

(۲) چند درصد حجم ظرف C اسید سولفوریک خالص است؟

(۳) اگر بخواهیم این محلول را به یک محلول اسید سولفوریک ۲۰ درصد تبدیل کنیم، چند کیلوگرم اسید سولفوریک اضافه کنیم؟

۲۴۶- آلیاژی از قلع و سرب به وزن ۲۰ کیلوگرم وقتی در آب غوطه‌ور می‌شود و دو کیلوگرم وزن خود را از دست می‌دهد. اگر ۱۰ کیلوگرم قلع در آب، ۱۱/۸ کیلوگرم وزن خود و ۵ کیلوگرم سرب در آب، ۳/۸ کیلوگرم وزن خود را از دست دهد، حساب کنید در این آلیاژ چه قدر قلع و سرب وجود دارد؟

۲۴۷- اگر یکی از جواب‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ مربع جواب دیگر باشد، ثابت کنید:

$$\left(\frac{c-b}{a-b}\right)^2 = \frac{c}{a}$$

۲۴۸- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی درجه دوم $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند، معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که جواب‌های آن α^y و β^y باشد.

۲۴۹- دو رأس یک مستطیل روی محور x ها و دو رأس دیگر آن روی دو خط $y = 2x$ و $y = 4 - 3x$ واقع هستند. بیشترین مساحت این مستطیل را به دست آورید.

۲۵۰- اگر $xyz = 1$ باشد، ثابت کنید:

$$\frac{x}{xy+x+1} + \frac{y}{yz+y+1} + \frac{z}{zx+z+1} = 1$$

۲۵۱- حاصل عبارت روبه‌رو را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\frac{x^4 - (x-1)^2}{(x^2+1)^2 - x^2} + \frac{x^4 - (x-1)^2}{x^2(x+1)^2 - 1} + \frac{x^2(x-1)^2 - 1}{x^2 - (x^2+1)^2}$$

۲۵۲- معادلات زیر را حل کنید.

(راهنمایی: ابتدا صورت و مخرج کسر را بر $x \neq 0$ تقسیم کرده و سپس $x + \frac{2}{x}$ را متغیر جدید بگیرید.)

$$\frac{4x}{x^2+x+3} + \frac{5x}{x^2-5x+3} = -\frac{3}{2} \quad (1)$$

$$\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 1 \circ \left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right) \quad (2)$$

۳) $x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 8$ (راهنمایی: به طرفین معادله، عبارت $\frac{x}{x-1}$ را اضافه کنید و $\frac{x^2}{1-x}$ را به عنوان متغیر جدید اختیار کنید).

۴) $(x = \frac{y}{4} - y$ دهید (راهنمایی: قرار دهید $(5-x)^4 + (2-x)^4 = 17$)

۲۵۳- معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x}$

۲) $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2}$ (راهنمایی: قرار دهید $2x-5 = y^2$ و معادله را ساده کنید.)

۳) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} = 4-2x$ (راهنمایی: قرار دهید $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} = y$)

۴) $\frac{\sqrt[n]{a+x}}{a} + \frac{\sqrt[n]{a+x}}{x} = \frac{\sqrt[n]{x}}{b}$ ($a > b > 0$)

$\frac{36}{\sqrt{x-2}} + \frac{4}{\sqrt{y-1}} + 4\sqrt{x-2} + \sqrt{y-1} - 28 = 0$

۲۵۴- مقادیر x و y را از معادله‌ی روبه‌رو به دست آورید.

۲۵۵- نامعادلات زیر را حل کنید.

۱) $\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9$

۲) $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$

۲۵۶- حدود m را طوری تعیین کنید که نامعادله‌ی $|x+2| + |1-x| \geq \frac{4m+1}{m-1}$ همواره برقرار باشد.

۲۵۷- حدود m را چنان تعیین کنید که به ازای جميع مقادیر x نامعادله‌ی $|x-1| - |x| \leq \frac{m+1}{2m-3}$ برقرار باشد.

$|x^2-x| + |2-x| = |x^2+2x|$

۲۵۸- معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

۲۵۹- مجموعه جواب نامعادلات زیر را تعیین کنید.

۱) $\frac{|x^2-3|+3}{x^2+|x-5|} \geq 1$

۲) $|3x^2-4|x|-4| \leq |x^2+2|x-8|$

۲۶۰- مجموعه جواب نامعادله‌ی $|\sin x| \geq \left|\frac{2x}{\pi}\right|$ را به روش رسم منحنی تعیین کنید.

۲۶۱- حدود a را طوری تعیین کنید که معادله‌ی $\sin x = \frac{x}{a}$ دارای γ جواب باشد ($a > 0$).