هندسه‌ی ۱ و ۲ کم‌حجم و مقوی خیلی سبز چه چوریه؟

تا حالا، چندبار این جمله‌ها را شنیده‌ای؟ «تست‌های هندسه پایه‌ی کنکور سخت هستند!»، «هندسه پایه، کار هر کسی نیست!» و یا مثلاً پیشنهاد «اصلاً هندسه پایه را در کنکور رها کن!»

به هر حال تو هرقدر این جمله‌ها را جدی گرفته باشی یا نه، به یک منبع کامل و در عین حال کم‌حجم برای جمع‌بندی هندسه پایه‌ات احتیاج داری، شاید هم بخواهی در یک فرصت کم، از آن بهترین نتیجه را بگیری!

این کتاب خیلی‌سبز، هدیه‌ی باارزشی است به تو؛ با آن درس بخوان، یاد بگیر، تست بزن و تمرین کن؛ جمع‌بندی و مرور کن و از همه مهم‌تر در زمانت صرفه‌جویی کن! این کتاب تمام ابهت و بزرگی کنکورهای سراسری، آزاد و خارج و ... را پیش پایت خرد می‌کند و غولی را که همه از هندسه پایه در ذهنت ساخته‌اند، به سادگی محو می‌کند. چراکه با خواندن آن، می‌توانی به تست‌های کنکور، که حالا دیگر برایت ایده‌ی جدیدی ندارند و تکراری شده‌اند، فقط لبخند بزنی! و می‌بینی که چیزی فراتر از این در کنکورت وجود ندارد؛ هیچی!

اما من این کتاب را برای تو نوشته‌ام، که از حجم زیاد کتاب‌های هندسه پایه با تست‌های تکراری و از روی هم نوشته‌شان، خسته‌ای! برای تو که به دنبال منبعی از تست‌های تألیفی و ترکیبی ناب می‌گشتی! برای تو که نمی‌دانستی شب کنکورهای آزمایشی و سراسری‌ات، چگونه سریع و کامل مرور و جمع‌بندی کنی! برای تو که دنبال فرصتی برای آشتی با هندسه پایه بودی! و برای تو که میدانی برای مبارزه و چالش بیشتر با تست‌های قوی می‌خواستی؛ برای تو ... این کتاب خیلی‌سبز، پیش‌کشی است به تو؛ با پشتوانه‌ای از سال‌ها تجربه، بسته‌ای که درکم‌ترین زمان تو را برای کنکورت مسلح می‌کند. دیگر نه ترسی از کمبود زمان خواهی داشت، نه سختی درس، نه سردرگمی جمع‌بندی!

خب، ویژگی‌های منحصربه‌فردی در کتاب تو، قرار دارد! دسته‌بندی و ارائه‌ی منظم نکات در قالب جدول‌ها، حل تست‌های تألیفی و ترکیبی که هر کدامشان چندین نکته را پوشش می‌دهند، بررسی دقیق و کامل تمام زاویه‌های کتاب درسی، آزمون‌های تألیفی هدفمند و کلی چیزهای دیگه!!

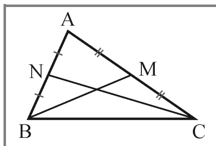
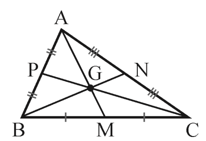
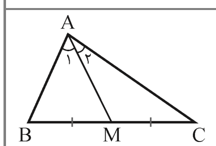
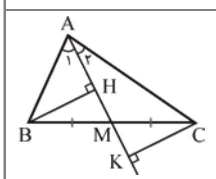
اما از آن‌جا که نتیجه‌گیری کامل از یک کتاب در گرو دانستن هدف‌های مؤلفِ آن است، توجه شما را به موردهای زیر جلب می‌کنم:

- بهترین روش استفاده از کتاب خیلی‌سبز هندسه پایه، این است که همراه آن شوی، نکته‌ها را بفهمی، اثبات کنی و بعد تست‌هایش را حل کنی، چون کتاب خیلی‌سبز هندسه‌ات، یک کتاب فرمول نیست!
- یک ویژگی شاخص داشته باش که همه‌ی دانش‌آموزان برتر داشته‌اند؛ سرسخت باش، با اراده و اطمینان حرکت کن؛ هرچه می‌خواهی در این کتاب هست!
- کنار بعضی نکات، آدرس تست‌های سراسری و آزاد قرار گرفته که با دانستن آن نکته به سادگی حل می‌شده‌اند! این کار در عین حال که اهمیت نکته‌ها را از جهت تکرار در کنکور نشان می‌دهند، توجه بیشتر شما را به این موضوعات نسبت به بقیه‌ی مطالب جلب می‌کنند!
- نکات همراه با آیکون را جدی‌تر و مهم‌تر (!) بخوان؛ چون مهم هستند! آیکون‌های تکنیک‌ها، روش‌ها و قِلِق‌های حل تست را به شما گوشزد می‌کنند؛ راستی، مواظب چاله‌ها باشید، ، آخه مکان شناخته‌شده‌ی اشتباهات بچه‌هاست! در ضمن، اگر وقت یا حوصله‌ات کم است، می‌توانی از مطالبی که آیکون دارند، بگذری؛ این‌ها برای کسانی است که می‌خواهند هندسه را بترکانند!

قسمتی از کتاب هندسه ۱ و ۲ کم‌حجم و مقوی انتخاب شده از فصل اول کتاب، مباحث میانه، نیمساز، عمودمنصف، ارتفاع، مساحت مثلث و نامساوی‌ها در مثلث.

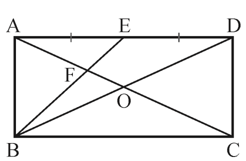
میانه در مثلث

- **میانه**: پاره‌خطی است که از رأس مثلث به وسط ضلع مقابلش وارد می‌شود.
- **خواص عمومی میانه**

در مثلث هر ضلع که کوچک‌تر باشد، میانه‌ی نظیر آن ضلع بزرگ‌تر است و برعکس.	$AB < AC \iff CN > BM$ یا $c < b \iff m_c > m_b$	
میانه‌ها همدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند (*مهم‌ترین ویژگی میانه*).	$AG = 2GM = \frac{2}{3}AM$ $BG = 2GN = \frac{2}{3}BN$ $CG = 2GP = \frac{2}{3}CP$	
میانه‌ی نظیر هر ضلع با دو ضلع دیگر زاویه‌هایی می‌سازد. هر ضلع که بزرگ‌تر باشد، زاویه‌اش با میانه، کوچک‌تر است و برعکس.	AM میانه است. $AB < AC \iff \hat{A}_1 > \hat{A}_2$	
فاصله‌ی دو رأس مثلث از میانه‌ی نظیر ضلع سوم، برابر است و برعکس.	AM میانه $\iff BH = CK$	

سراسری ۸۷

۳۲- در شکل روبه‌رو، ABCD مستطیل بوده و اندازه‌ی OF عددی صحیح است. اگر قطر، عددی دورقمی باشد، چند جواب برای قطر با این شرایط وجود دارد؟

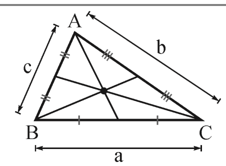
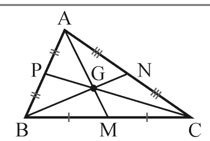
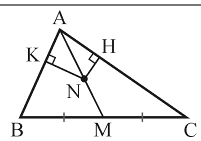
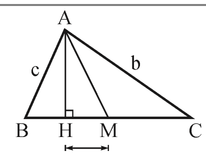
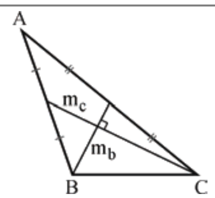


۱) ۳۰
۲) ۲۹
۳) ۳۱
۴) ۳۲

۳۳- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، G مرکز ثقل است. هرگاه $CG = \frac{16}{3}$ و $BG = \frac{22}{3}$ باشد، اندازه‌ی BC کدام است؟

۱) ۱۲
۲) $\sqrt{148}$
۳) $\sqrt{140}$
۴) ۱۴

روابط طولی برای میانه‌ها

طول میانه‌ها برحسب اضلاع مثلث	$m_a=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲(b^۲+c^۲)-a^۲}\quad , \quad m_b=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲(a^۲+c^۲)-b^۲}\quad , \quad m_c=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲(b^۲+a^۲)-c^۲}$	
در صورت داشتن دو ضلع از مثلث و میانه‌ی نظیر ضلع سوم	$b^۲+c^۲=۲m_a{}^۲+\frac{a^۲}{۲}\quad , \quad a^۲+c^۲=۲m_b{}^۲+\frac{b^۲}{۲}\quad , \quad a^۲+b^۲=۲m_c{}^۲+\frac{c^۲}{۲}$	
مجموع مربعات سه میانه	$m_a{}^۲+m_b{}^۲+m_c{}^۲=\frac{۳}{۴}(a^۲+b^۲+c^۲)$	
مجموع مربعات سه قطعه‌ی حاصل از رئوس تا مرکز ثقل	$AG^۲+BG^۲+CG^۲=\frac{۱}{۳}(a^۲+b^۲+c^۲)$	
خاصیت نقطه‌ی دلخواه روی میانه	اگر N نقطه‌ای دلخواه روی میانه‌ی AM باشد، فاصله‌ی N تا AB ضرب‌در AB مساوی است با فاصله‌ی N تا AC ضرب‌در AC. $NK\cdot AB=NH\cdot AC$	
تفاضل مربعات دو ضلع مثلث	تفاضل مربعات دو ضلع مساوی است با دو برابر ضلع سوم ضرب‌در تصویر میانه روی ضلع سوم. $\|b^۲-c^۲\|=۲a\cdot MH$	
در مثلث دلخواهی، دو میانه بر هم عمود باشند	اگر $m_b \perp m_c$ باشد، آن‌گاه: $m_b{}^۲+m_c{}^۲=m_a{}^۲$ $b^۲+c^۲=۵a^۲$	

۳۴- در مثلثی طول اضلاع a، b و c است و m_a میانه‌ی نظیر BC می‌باشد. مثلث دیگری با طول اضلاع b، c و $۲m_a$ رسم کرده‌ایم. طول میانه‌ی وارد بر ضلع $۲m_a$، $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ گردیده است. اندازه‌ی BC کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

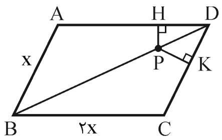
۳۵- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای ارتفاع وارد بر وتر $m\sqrt{m}$، اندازه‌ی وتر $۲m+۲$ و فاصله‌ی پای ارتفاع و پای میانه‌ی نظیر وتر نیز $\sqrt{۳}$ است. اگر $\hat{A}$ زاویه‌ی قائمه باشد، $\|b^۴-c^۴\|$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۲۸\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) ۲۵۶ ۳) $۱۲۸\sqrt{۳}$ ۴) $۱۲۰\sqrt{۳}$

۳۶- در مثلث متساوی‌الساقینی، دو میانه‌ی نظیر ساق بر هم عمودند. بین نسبت‌های $\frac{m_a}{m_b}$، $\frac{a}{b}$، $\frac{a}{m_b}$ و $\frac{a}{m_a}$ بزرگ‌ترین عدد کدام است؟ ($\hat{A}$ رأس مثلث)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۸}}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\sqrt{۵}$

۳۷- در متوازی‌الاضلاع روبه‌رو، حاصل $\frac{PH}{PK}$ از کدام عدد، کوچک‌تر است؟



۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۲۰}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۵}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

آزاد ۸۴

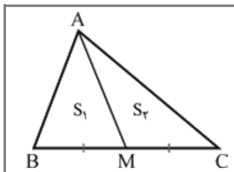
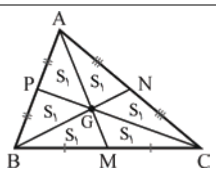
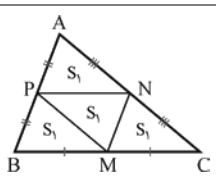
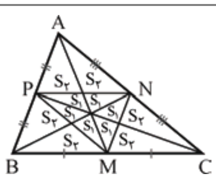
● **تشخیص نوع مثلث با کمک بزرگ‌ترین ضلع و اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر آن**

$\hat{A} > ۹۰^\circ \iff m_a < \frac{a}{۲}$	$\hat{A} = ۹۰^\circ \iff m_a = \frac{a}{۲}$	$\hat{A} < ۹۰^\circ \iff m_a > \frac{a}{۲}$
مثلث منفرجه‌الزاویه	مثلث قائم‌الزاویه	مثلث با زاویه‌های حاده

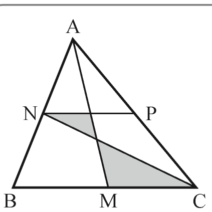
۳۸- در مثلث ABC که $a = ۸$ ، $c = ۱۲$ و $m_b = ۶$ است، محل همرسی عمودمنصف‌ها کجا قرار دارد؟

۱) داخل مثلث
۲) خارج مثلث
۳) وسط یک ضلع
۴) روی یک رأس

● **روابط مربوط به مساحت** (*در تمام موارد منظور از S، مساحت مثلث ABC است.*)

میانه، هر مثلث دلخواه را بـه دو مثلـث بـا مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.	$S_{AMB} = S_{AMC}$ $S_۱ = S_۲ = \frac{S}{۲}$	
اگر در مثلثی دلخواه، هر سه میانه را رسـم کنیم، شش مثلث با مساحت‌هـای مـساوی به‌وجود می‌آید.	$S_{AGN} = S_{NGC} = S_{CGM} = S_{MBG} = S_{BGP} = S_{AGP}$ $S_۱ = \frac{۱}{۶}S$	
اگر وسط‌های اضلاع مثلث دلخـواهی را بـه هم وصل کنیم، مثلثی به‌وجود می‌آیـد بـه نام «**مثلث میانه‌ای**» که:	مثلث MNP با مثلث ABC متشابه است با نسبت $\frac{۱}{۲}$ محیط مثلث MNP، نصف محیط مثلث ABC است. $S_۱ = \frac{۱}{۴}S$ یا $S_{MNP} = \frac{۱}{۴}S_{ABC}$	
سراسری ۸۴ اگر هر سه میانه را در مثلثی کشیده و پای میانه‌ها را به هم وصل کنـیم (میانـه‌هـا و مثلث میانه‌ای را بکشیم) بـین ۶ مـساحت وسطی و ۶ مساحت دورتادور داریم:	$S_۱ = \frac{۱}{۲۴}S$ $S_۲ = \frac{۱}{۸}S$ $S_۲ = ۳S_۱$	

۳۹- در شکل مقابل، M ، N و P وسط‌های اضلاع‌اند؛ اگر مساحت قسمت رنگـی ۵ باشـد، مـساحت مثلث ABC کدام است؟

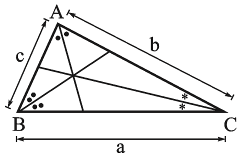
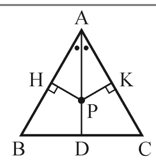
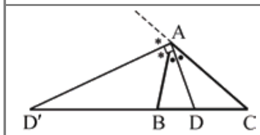
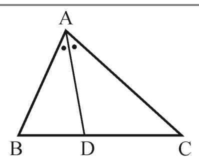
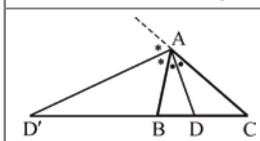
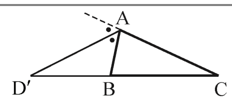


۱) ۳۲
۲) ۳۰
۳) ۲۴
۴) ۴۶

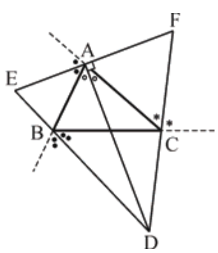
نیمساز در مثلث

● **تعریف:** نیمساز در مثلث به پاره‌خطی گفته می‌شود که از رأس به ضلع مقابل طوری رسم شود که زاویه‌ی همین رأس در مثلث را نصف کند.

● **خواص عمومی نیمساز**

در مثلث دلخواه، هر ضلعی بزرگ‌تر باشد، نیمساز نظیر آن ضلع کوچک‌تر است و برعکس.	$a > b > c \iff d_a < d_b < d_c$ بزرگ‌ترین ضلع، کوچک‌ترین نیمساز را دارد.	
هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و برعکس.	AD نیمساز P روی نیمساز $\iff PH = PK$	
نیمساز داخلی و خارجی یک زاویه بر هم عمودند. یا مثلثی که اضلاعش نیمساز داخلی و خارجی یک زاویه‌اند، قائم‌الزاویه است.	AD نیمساز داخلی و AD' نیمساز خارجی A. $AD \perp AD'$ یا مثلث ADD' قائم‌الزاویه است.	
وقتی نیمساز یک زاویه رسم می‌شود، روی ضلع مقابل دو قطعه ایجاد می‌کند به‌طوری که هر قطعه از ضلع بالایِ خود کوچک‌تر است.	AD نیمساز $BD < AB$ $DC < AC$	
نیمساز داخلی (و نیمساز خارجی) ضلع مقابل خود را به نسبت اضلاع زاویه و مساحت مثلث‌های پدید آمده تقسیم می‌کند.	$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{S_{ABD}}{S_{ADC}}$ $\frac{BD'}{CD'} = \frac{AB}{AC} = \frac{S_{AD'B}}{S_{AD'C}}$	
موقع رسم نیمساز خارجی، باید آن‌را طرف ضلع کوچک‌تر آن زاویه رسم کنید!	$AB < AC$ است؛ پس نیمساز خارجی $\hat{A}$ سمت AB قرار گرفته!	

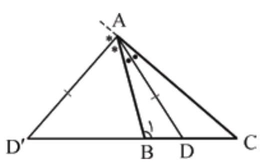
● نیمسازهای داخلی هر مثلث، ارتفاع‌های مثلثی هستند که از برخورد نیمسازهای خارجی به‌وجود می‌آید، یعنی نیمساز داخلی A هم از D می‌گذرد و هم بر EF عمود است، همین‌طور برای نیمسازهای دیگر.



● شرط لازم و کافی برای تساوی نیمساز داخلی و خارجی یک زاویه، آن است که تفاضل دو زاویه‌ی دیگر مثلث، 90° باشند.

در این حالت مثلث ADD' که همیشه قائم‌الزاویه است، متساوی‌الساقین نیز می‌گردد.

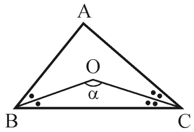
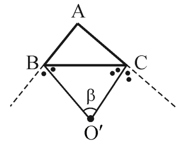
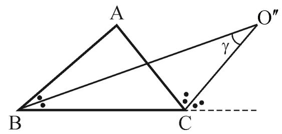
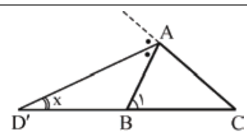
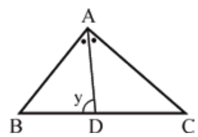
مثلث ADD' قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین و $AD = AD' \iff |\hat{B}_1 - \hat{C}| = 90^\circ$



۴۰- در مثلث ABC، سه نیمساز داخلی در O متقاطع‌اند. اگر AD نیمساز نظیر A بوده و $\frac{AO}{OD} = 2$ باشد، محیط مثلث ABC چه ضریبی از ضلع BC است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) 3 ۳) $\frac{21}{5}$ ۴) $\frac{7}{2}$

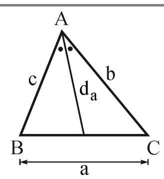
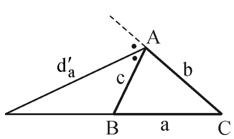
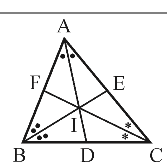
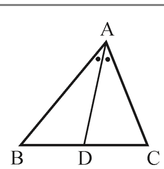
فرمول زاویه‌ها در حضور نیمساز

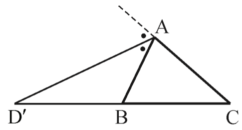
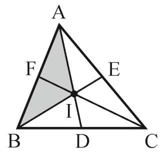
آزاد ۸۷ — زاویه‌ای که دو نیمساز داخلی در داخل مثلث با هم می‌سازند، برابر است با 90° به اضافه‌ی نصف زاویه‌ی سوم مثلث.	BO و CO نیمساز داخلی $\alpha = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ منفرجه	
زاویه‌ای که دو نیمساز خارجی دو زاویه در مثلث با هم می‌سازند. برابر است با 90°، منهای نصف زاویه‌ی سوم مثلث.	BO' و CO' نیمساز خارجی $\beta = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$ حاده	
آزاد ۸۷ — زاویه‌ای که یک نیمساز داخلی و یک نیمساز خارجی دو زاویه در مثلث با هم می‌سازند، مساوی است با نصف زاویه‌ی سوم مثلث.	BO'' نیمساز داخلی و CO'' نیمساز خارجی $\gamma = \frac{\hat{A}}{2}$	
زاویه‌ی بین نیمساز خارجی یک رأس با امتداد ضلع مقابل خود، نصف تفاضل دو زاویه‌ی دیگر مثلث است.	AD' نیمساز خارجی $x = \frac{\lvert \hat{B}_1 - \hat{C} \rvert}{2}$	
زاویه‌ی بین نیمساز داخلی یک رأس با ضلع مقابل خود، برابر است با 90° منهای نصف تفاضل دو زاویه‌ی دیگر مثلث.	AD نیمساز داخلی $y = 90^\circ - \frac{\lvert \hat{B} - \hat{C} \rvert}{2}$ یا $y = \hat{C} + \frac{\hat{A}}{2}$	

۴۱- در مثلث ABC، زاویه‌ی بین نیمسازهای خارجی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ برابر a درجه بوده و نیز زاویه‌های خارجی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ به ترتیب $(5a+10)$ و $(5a-10)$ درجه هستند. اگر I محل همرسی نیمسازهای داخلی باشد، $C\hat{I}A$ کدام است؟

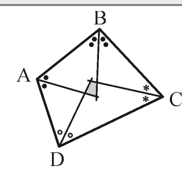
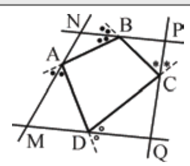
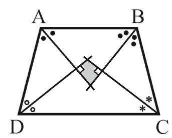
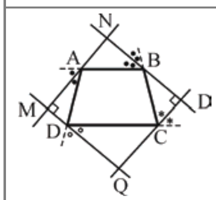
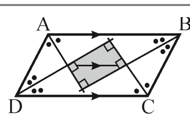
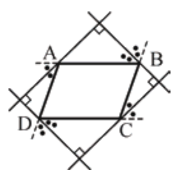
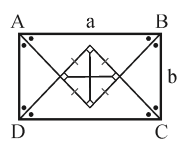
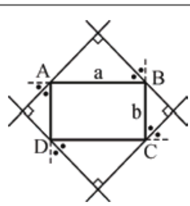
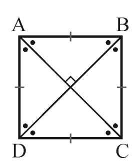
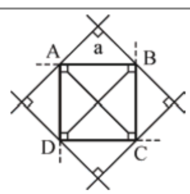
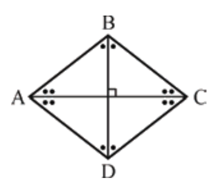
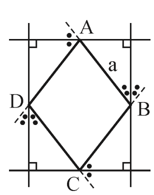
۱) 105° ۲) 120° ۳) 90° ۴) 100°

رابطه‌های طولی در حضور نیمساز

طول نیمساز داخلی برحسب اضلاع مثلث	$d_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$, $d_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$ $d_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$ p نصف محیط است.	
طول نیمساز خارجی برحسب اضلاع مثلث	$d'_a = \frac{2}{\lvert b-c \rvert}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$, $d'_b = \frac{2}{\lvert a-c \rvert}\sqrt{ac(p-a)(p-c)}$ $d'_c = \frac{2}{\lvert a-b \rvert}\sqrt{ab(p-a)(p-b)}$ p نصف محیط است.	
نسبت قطعات ایجاد شده روی نیمساز توسط نیمساز دیگر	$\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}$, $\frac{BI}{IE} = \frac{a+c}{b}$, $\frac{CI}{IF} = \frac{b+a}{c}$	
طول نیمساز داخلی برحسب قطعاتی که روی ضلع مقابل خود می‌سازد.	*سراسری ۸۳، ۸۶، ۸۷* $BD = \frac{ac}{b+c}$, $DC = \frac{ab}{b+c}$, $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$	

طول نیمساز خارجی برحسب قطعاتی که روی ضع مقابل خود و امتداد آن ایجاد می‌کند	$BD' = \frac{ac}{\|b-c\|}$, $CD' = \frac{ab}{\|b-c\|}$, $AD'^{۲} = BD' \cdot CD' - AB \cdot AC$	
مساحت مثلث‌هایی که توسط نقطه‌ی همرسی نیمسازها ساخته می‌شوند	$S_{AIB} = \frac{cS}{a+b+c}$, $S_{BIC} = \frac{aS}{a+b+c}$, $S_{AIC} = \frac{bS}{a+b+c}$ (S ، مساحت مثلث ABC است.)	

● **چهارضلعی‌های حاصل از تلاقی نیمسازهای داخلی و خارجی یک چهارضلعی**

شکل اولیه	شکل حاصل از تلاقی نیمسازهای داخلی	شکل	شکل حاصل از تلاقی نیمسازهای خارجی	شکل
چهارضلعی محدب دلخواه ABCD	چهارضلعی محاطی (مجموع زاویه‌های مقابلش ۱۸۰° است)		چهارضلعی محاطی MNPQ (مجموع زاویه‌های مقابلش ۱۸۰° است)	
سراسری ۸۸ **ذوزنقه‌ی** ABCD	چهارضلعی محاطی (دو زاویه‌ی مقابل آن ۹۰° است.)		چهارضلعی محاطی MNPQ (دو زاویه‌ی مقابل ۹۰°)	
سراسری ۸۰ **متوازی‌الاضلاع** ABCD	مستطیل به اضلاع: $(AB-BC)\cos\frac{\hat{B}}{۲}$ $(AB-BC)\sin\frac{\hat{B}}{۲}$ و به مساحت: $\frac{۱}{۲}(AB-BC)^{۲}\sin\hat{B}$	قطرهای مستطیل هر کدام با اضلاع روبه‌روی متوازی‌الاضلاع، موازی است.	مستطیل به اضلاع: $(AB+BC)\cos\frac{\hat{B}}{۲}$ $(AB+BC)\sin\frac{\hat{B}}{۲}$ و به مساحت: $\frac{۱}{۲}(AB+BC)^{۲}\sin\hat{B}$	
سراسری ۸۷ **مستطیل** ABCD	مربع به اضلاع: $\frac{\|a-b\|}{\sqrt{۲}}$ و به مساحت: $S = \frac{(a-b)^{۲}}{۲}$ قطرهای مربع هر کدام با اضلاع روبه‌روی مستطیل، موازی است.		مربع به اضلاع: $\frac{\|a+b\|}{\sqrt{۲}}$ و به مساحت: $S = \frac{(a+b)^{۲}}{۲}$	
مربع ABCD	نقطه قطرها همان نیمسازها هستند.		مربع به ضلع: $\sqrt{۲}a$ و به مساحت: $۲a^{۲}$	
لوزی ABCD	نقطه قطرها همان نیمسازها هستند.		مستطیل به اضلاع: $۲a\sin\frac{\hat{A}}{۲}$ $۲a\cos\frac{\hat{A}}{۲}$ و به مساحت: $۲a^{۲}\sin\hat{A}$	

- شکل حاصل از تلاقی نیمسازهای داخلی هر چهارضلعی محیطی، همواره نقطه است! *آخه نیمسازهای داخلی‌اش همرس‌اند.*
- **یه حالت خاص مهم:**

آزاد ۸۲ «اگر نیمسازهای داخلی یک مستطیل را بکشیم و مربعی به دست آید که دو رأس مقابل آن روی اضلاع مستطیل قرار بگیرند، نسبت طول به عرض مستطیل ۲ به ۱ است.»

۴۲- در مثلث ABC ، AD نیمساز نظیر A و I محل همرسی نیمسازهاست اگر $\frac{AI}{AD}=\frac{3}{10}$ باشد، $\frac{a}{p}$ کدام است؟

۱) ۱/۸ ۲) ۱/۲ ۳) ۱/۴ ۴) ۲/۶

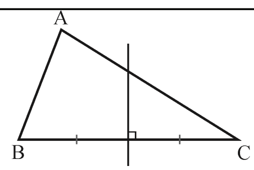
۴۳- از برخورد نیمسازهای داخلی چهارضلعی A ، چهارضلعی B و از برخورد نیمسازهای خارجی B یک چهارضلعی متشابه با B به‌وجود آمده است. از برخورد نیمسازهای خارجی A و نیمسازهای داخلی B به ترتیب چه شکلی پدید می‌آید؟

۱) مربع ـ لوزی ۲) لوزی ـ نقطه ۳) مربع ـ نقطه ۴) لوزی ـ مربع

۴۴- از برخورد نیمسازهای داخلی متوازی‌الاضلاعی که ضلع بزرگش ۱۶ و یک زاویه‌ی آن 45° است، مستطیلی به مساحت $2\sqrt{2}$ به‌وجود آمده است. مساحت چهارضلعی حاصل از تلاقی نیمسازهای خارجی متوازی‌الاضلاع تقریباً کدام است؟

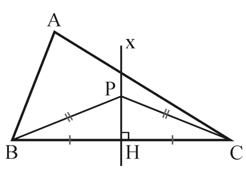
۱) ۳۰۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۴۰۰ ۴) ۱۵۰

عمودمنصف در مثلث



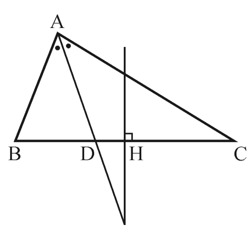
- **تعریف:** عمودمنصف نیم‌خطی (یا پاره‌خطی) است که از وسط ضلع بر آن ضلع عمود می‌شود.

- عمودمنصف یک ضلع از رأس مقابلش نمی‌گذرد، مگر این‌که این ضلع قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین باشد!

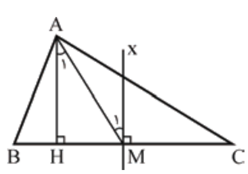


- هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و برعکس. پس در مثلث دلخواه ABC هم نقطه‌ی P که روی عمودمنصف ضلع BC قرار گرفته، از دو سر آن ضلع به یک فاصله بوده ($PB=PC$) و مثلث متساوی‌الساقین به‌وجود می‌آورد. منظورم مثلث PBC است.

مثلث PBC متساوی‌الساقین و $PB=PC \iff xH$ عمودمنصف BC

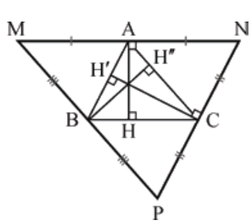


- عمودمنصف هر ضلع مثلث، به جز مثلث متساوی‌الساقین، با نیمساز داخلی زاویه‌ی مقابل آن ضلع، همواره همدیگر را در بیرون مثلث قطع می‌کنند. خوب است بدانید این نقطه دقیقاً وسط کمان دایره‌ی محیطی مثلث ABC است (*به فصل دایره رجوع کنید*).



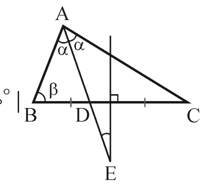
- میانه‌ی وارد بر هر ضلع مثلث با ارتفاع و عمودمنصف نظیر همان ضلع، زاویه‌های مساوی می‌سازد!

ارتفاع AH میانه و AM عمودمنصف و $xM \implies \hat{A}_1=\hat{M}_1$

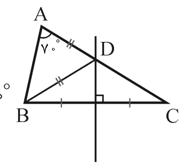


- اگر از سه رأس مثلث دلخواه ABC ، خط‌هایی موازی ضلع روبه‌رویی رسم کنیم تا همدیگر را قطع کنند، مثلثی متشابه با مثلث اولیه به‌وجود می‌آید که اضلاعش دو برابر مثلث ABC و مساحتش چهاربرابر مساحت ABC است؛ در ضمن ارتفاع‌های مثلث ABC ، عمودمنصف‌های مثلث جدید است.

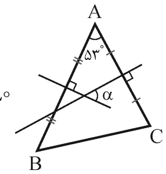
۴۵- در هر یک از موارد زیر عمودمنصف اضلاع رسم شده است، در کدام موردها محاسبه‌ی انجام شده، درست است؟

الف) 

$\hat{E} = |\alpha + \beta - ۹۰^\circ|$

ب) 

$\hat{C} = ۳۰^\circ$

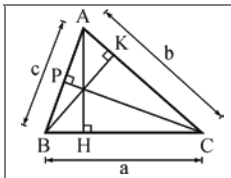
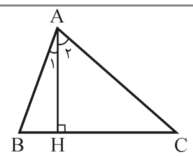
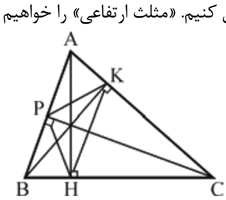
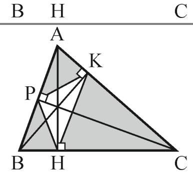
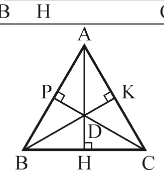
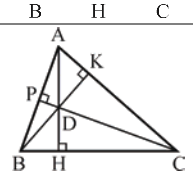
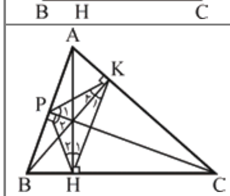
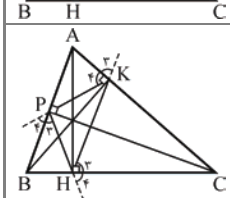
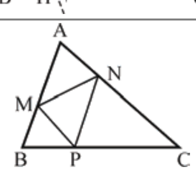
ج) 

$\alpha = ۵۳^\circ$

۱) هیچ‌یک ۲) «الف» و «ب» ۳) «الف» و «ج» ۴) «ب» و «ج»

ارتفاع در مثلث

- **تعریف:** ارتفاع پاره‌خطی است که از یک رأس به ضلع مقابل آن عمود می‌شود.
- **خواص عمومی ارتفاع** (*آن‌چه همه باید درباره‌ی ارتفاع بدانند!*)

در مثلث دلخواه هر ضلعی بزرگ‌تر باشد، ارتفاع نظیرش کوچک‌تر است و برعکس.	$a > b > c \iff h_a < h_b < h_c$	
ارتفاع نظیر هر ضلع، به ضلع کوچک‌تر نزدیک‌تر است و با ضلع کوچک‌تر زاویه‌ی کوچک‌تری می‌سازد و برعکس.	AB از AC کوچک‌تر است، پس AH نزدیک‌تر به AB است تا AC! $AB < AC \iff \hat{A}_۱ < \hat{A}_۲$	
«خواص **مثلث ارتفاعی**» اگر سه ارتفاع مثلث دلخواه را رسم کرده و پاهای سه ارتفاع را به هم وصل کنیم. «مثلث ارتفاعی» را خواهیم داشت.  مثلث HPK مثلث ارتفاعی است!	وقتی سه ارتفاع و مثلث ارتفاعی را بکشیم، سه مثلث دورتادور با مثلث اصلی متشابه‌اند: $\overset{\Delta}{APK} \simeq \overset{\Delta}{BPH} \simeq \overset{\Delta}{CKH} \simeq \overset{\Delta}{ABC}$	
	$BC^۲ + AD^۲ = AC^۲ + BD^۲ = AB^۲ + CD^۲$	
	$BC \cdot AD + AC \cdot BD + AB \cdot CD = ۴S$ S مساحت مثلث ABC است.	
	ارتفاع‌های مثلث اصلی، برای مثلث ارتفاعی نیمساز هستند. $\hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ \quad , \quad \hat{K}_۱ = \hat{K}_۲ \quad , \quad \hat{P}_۱ = \hat{P}_۲$	
	ضلع‌های مثلث اصلی، برای مثلث ارتفاعی نیمساز خارجی‌اند. $\hat{H}_۳ = \hat{H}_۴ \quad , \quad \hat{K}_۳ = \hat{K}_۴ \quad , \quad \hat{P}_۳ = \hat{P}_۴$	
	برای مثلث حاده‌الزاویه‌ی ABC، مثلث ارتفاعی در بین تمام مثلث‌های محاط شده در ABC کم‌ترین محیط را دارد: محیط مثلث ارتفاعی $\leq$ محیط MNP	

● در مثلث متساوی‌الاضلاع، مثلث ارتفاعی با خود مثلث اصلی متشابه است، با نسبت تشابه $\frac{۱}{۲}$.

● **رابطه‌های طولی در حضور ارتفاع!**

اگر طول اضلاع مثلث ABC ، a ، b و c و ارتفاع‌های نظیر آن‌ها به ترتیب h_a ، h_b و h_c فرض شوند، همواره داریم:

طول ارتفاع برحسب اضلاع	$h_a=\frac{۲S}{a}=\frac{۲}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ ,\ h_b=\frac{۲S}{b}=\frac{۲}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $h_c=\frac{۲S}{c}=\frac{۲}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	
رابطـه‌ی بـین دو ضـلع و ارتفاع نظیر آن‌ها	$\frac{a}{b}=\frac{h_b}{h_a}\quad,\quad\frac{a}{c}=\frac{h_c}{h_a}$ $\frac{b}{c}=\frac{h_c}{h_b}$ یا $ah_a=bh_b=ch_c$	یعنـی روابط بـین ضلع‌هـای مثلث، روابط معکوسی بـین ارتفاع‌های نظیر آن‌ها را نتیجه می‌دهد.
رابطه‌ی بین سـه ارتفـاع و اضلاع با مساحت	$\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{p}{S}$	در تست‌هایی که هر سه ارتفاع وجود دارند، مـی‌تـوان از ایـن رابطه کمک گرفت!
نسبت اضلاع و ارتفاع‌ها	$\frac{h_a}{\frac{۱}{a}}=\frac{h_b}{\frac{۱}{b}}=\frac{h_c}{\frac{۱}{c}}=۲S$ یا $\frac{a}{\frac{۱}{h_a}}=\frac{b}{\frac{۱}{h_b}}=\frac{c}{\frac{۱}{h_c}}=۲S$	سه ارتفاع مثلث با معکوس اضلاع متناسب‌اند.

● هر تساوی یا نامساوی که بین اضلاع مثلث برقرار بوده و همگی هم‌درجه باشند را می‌توان به جمله‌ای برحسب ارتفاع‌هـا تبـدیل کـرد، بـا ایـن جمله‌ی طلایی محشر: *ضلع بَردار عکس ارتفاع بگذار! یا ارتفاع بَردار عکس ضلع بگذار!*

● با عکس ارتفاع‌ها ($\frac{۱}{h_a},\frac{۱}{h_b},\frac{۱}{h_c}$) می‌توانیم یک مثلث بسازیم که با مثلث اصلی متشابه است، نسبت تشابه هم ۲S می‌باشد.

۴۶- در مثلثی $۲a^۲=۳bc$ است. کدام رابطه بین ارتفاع‌ها درست است؟

۱) $۳h_a=۲h_bh_c$ ۲) $۲h_a^۲=۳h_bh_c$ ۳) $۳h_a^۲=۲h_bh_c$ ۴) $۳h_a^۲=۲h_b+۲h_c$

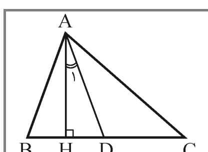
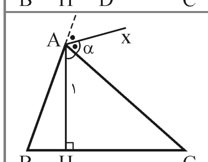
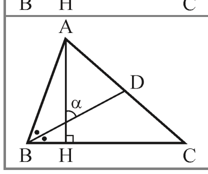
۴۷- مثلثی با اندازه‌ی سه ارتفاع $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و h منفرجه‌الزاویه است. h کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱/۲۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۱ ۴) ۰/۲

۴۸- در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB=AC$)، طول میانه‌ی نظیر قاعده ۸ و اندازه‌ی قاعده ۱۲ است. حاصل $\frac{h_b}{h_a}+\frac{h_c}{h_b}+\frac{h_a}{h_c}$ کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) $\frac{۶۵}{۳۰}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۹۱}{۳۰}$

● **زاویه‌ها در حضور ارتفاع**

در مثلث دلخواه، زاویه‌ی بین ارتفاع و نیمساز یـک رأس، مساوی نصف تفاضل دو زاویه‌ی دیگر مثلث است.	AH ارتفاع و AD نیمساز $\hat{A}_۱=\frac{\lvert\hat{B}-\hat{C}\rvert}{۲}$	
در مثلث دلخواه، زاویه‌ی بـین ارتفـاع و نیمـساز خـارجی یک رأس برابر است با ۹۰° به اضافه‌ی نـصف تفاضـل دو زاویه‌ی دیگر مثلث، یا نصف این زاویه به اضافه‌ی زاویـه‌ی بزرگ‌تر مثلث.	AH ارتفاع و Ax نیمساز خارجی $\alpha=۹۰^\circ+\frac{\lvert\hat{B}-\hat{C}\rvert}{۲}=\frac{\hat{A}}{۲}+\hat{B}$	
در مثلث دلخواه، زاویه‌ی بین ارتفاع یک ضـلع و نیمـساز نظیر رأس دیگر، مساوی است با نـصف مجمـوع زاویـه‌ی سوم با زاویه‌ی نظیر ارتفاع.	AH ارتفاع و BD نیمساز $\alpha=\frac{\hat{C}+\hat{A}}{۲}$	

۴۹- در مثلث ABC، زاویه‌ی بین ارتفاع و نیمساز داخلی زاویه‌ی B برابر ۲۰° و تفاضل زاویه‌ی A با زاویه‌ی خارجی C، برابر ۶۰° است. زاویه‌ی بین ارتفاع و نیمساز خارجی نظیر B به اضافه‌ی زاویه‌ی بین ارتفاع B با نیمساز داخلی C کدام است؟

۱) ۱۳۵° ۲) ۱۶۰° ۳) ۱۴۵° ۴) ۱۳۰°

مساحت مثلث

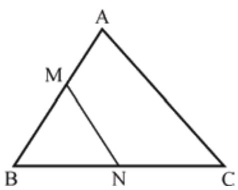
● مساحت مثلث دلخواه ABC به سه صورت اصلی زیر قابل محاسبه است:

آزاد ۸۲ و۸۴
سراسری ۸۵
آزاد ۸۲

مساحت برحسب ضلع و ارتفاع وارد بر آن	$S=\frac{۱}{۲}a\cdot h_a=\frac{۱}{۲}b\cdot h_b=\frac{۱}{۲}c\cdot h_c$
مساحت برحسب دو ضلع و زاویه‌ی بین	$S=\frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}ab\sin\hat{C}=\frac{۱}{۲}ac\sin\hat{B}$
مساحت برحسب سه ضلع	**دستور هرون:** $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (p نصف محیط است)

● *مساحت مثلث با معلوم بودن دو زاویه و ضلع بین آن‌ها نیز قابل محاسبه است. کافیه یه ضلع دیگه‌ی مثلث را با قضیه‌ی سینوس‌ها پیدا کنید و بقیه‌ی ماجرا...*

۵۰- در شکل روبه‌رو، $BM=\frac{۳}{۵}AB$ و N وسط BC است. $\frac{S_{AMNC}}{S_{ABC}}$ کدام است؟



۱) ۰/۳ ۲) ۰/۷
۳) ۰/۸ ۴) ۰/۶

۵۱- در مثلث ABC، $h_a=۸$، $b=۱۷$ و $c=۱۰$ است. مجموع جواب‌های ممکن برای S_{ABC} کدام است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۵۰ ۴) ۸۴

۵۲- در کدام مورد مساحت مثلث ABC، درست محاسبه شده است؟

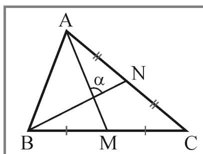
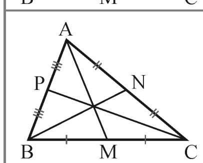
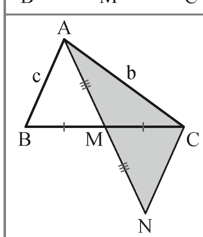
الف) اگر $۲AB=۳AC=۲۴$ و $\cos\hat{A}=\frac{\sqrt{۷}}{۴}$ **باشد، آن‌گاه** $S=۳۶$.

ب) اگر $۱۲BC=۳AB=۲۴$ و $\cos\hat{A}=\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$ **باشد، آن‌گاه** $S=۴\sqrt{۱۵}$.

۱) هیچ‌یک ۲) فقط «ب» ۳) فقط «الف» ۴) «الف» و «ب»

● **مساحت مثلث وقتی پای میانه‌ها در تست باز شده باشد**

آزاد ۸۷
آزاد ۸۲

وقتی دو میانه از مثلث و زاویه‌ی بین آن‌ها داده شده باشد (α , m_b , m_a)،	میانه‌ی AM با طول m_a و میانه‌ی BN با طول m_b معلوم‌اند. $S_{ABC}=\frac{۲}{۳}m_a\cdot m_b\cdot\sin\alpha$	
وقتی اندازه‌های سه میانه‌ی مثلثی داده شده باشد (m_c , m_b , m_a)،	$S_{ABC}=\frac{۴}{۳}\times$(مساحت مثلثی با اضلاع m_a، m_b و m_c) به عبارتی مساحت مثلثی با اضلاع m_a، m_b و m_c را پیدا و در $\frac{۴}{۳}$ ضرب کنید.	
وقتی دو ضلع از مثلث و میانه‌ی وارد بر ضلع سوم داده شده باشد (m_a , c , b)،	میانه را به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم و به جای S_{ABC} مساحت مثلث ANC را که با آن مساوی است، می‌یابیم؛ سه ضلع این مثلث b، $۲m_a$ و c هستند.	

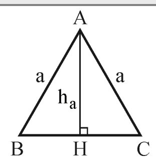
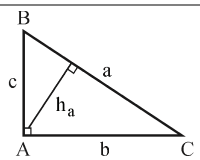
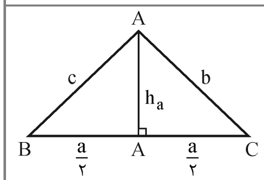
۵۳- مساحت مثلثی که طول سه میانه‌اش ۷ ، ۸ و ۹ باشند، کدام است؟

۱) $۱۲\sqrt{۵}$ ۲) $۲۰\sqrt{۵}$ ۳) $۹\sqrt{۵}$ ۴) $۱۶\sqrt{۵}$

۵۴- در مثلثی $a=۱۷$ ، $b=۲۱$ و $m_c=۵$ است؛ مساحت مثلث کدام است؟

۱) ۸۶ ۲) ۸۴ ۳) ۶۴ ۴) ۶۰

● محیط و مساحت مثلث‌های خاص

مثلث	محیط	ارتفاع‌ها	مساحت	شکل
متساوی‌الاضلاع به ضلع a	۳a	$h_a=h_b=h_c=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$	$S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$	
قائم‌الزاویه با وتر a و دو ضلع b و c	$a+b+c$	$h_a=\frac{bc}{a}$ $h_b=c$ $h_c=b$	$S=\frac{bc}{۲}$ یا $S=p(p-a)$ یا $S=(p-b)(p-c)$	
متساوی‌الساقین با قاعده‌ی a و ساق‌های b	$a+۲b$	$h_a=\frac{\sqrt{۴b^۲-a^۲}}{۲}$ $h_b=h_c=\frac{a}{b}h_a$	$S=\frac{a}{۴}\sqrt{۴b^۲-a^۲}$	

سراسری ۸۰

سراسری ۸۵

● *مساحت می‌تواند خودش یک راه‌حل تست باشد! نه این‌که فقط مساحت را خواسته باشند و ما حساب کنیم! معمولاً تست‌هایی که در آن کلمات «فاصله» و «عمود» حضور دارند، می‌توانند با مساحت حل شوند! چشم‌ها را باید شست!*

● رابطه‌های دیگر برای مساحت مثلث

۱) برحسب اضلاع و شعاع دایره‌ی محیطی: $S=\frac{abc}{۴R}$

۲) برحسب شعاع دایره‌ی محیطی و زاویه‌ها: $S=۲R^۲\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}$

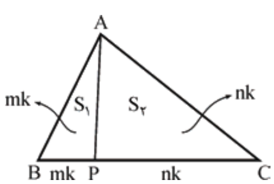
۳) برحسب اضلاع و شعاع دایره‌ی محاطی داخلی: $S=pr$

۴) برحسب اضلاع و شعاع دایره‌ی محاطی خارجی: $S=(p-a)r_a=(p-b)r_b=(p-c)r_c$

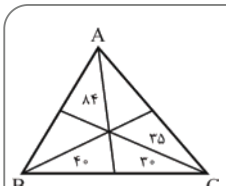
۵) $S=\frac{\sqrt[۳]{abch_ah_bh_c}}{۲}$

● *یک رابطه‌ی محشر!* اگر در مثلث ABC ، خط دلخواه AP طوری رسم شود که $\frac{BP}{PC}=\frac{m}{n}$ باشد، دراین‌صورت، $\frac{S_{ABP}}{S_{APC}}=\frac{m}{n}$.

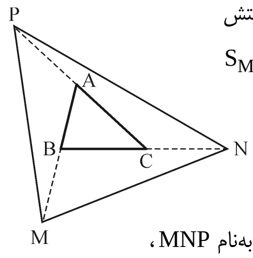
به زبان دیگر، نسبت دو قطعه هر چه باشد، نسبت مساحت مثلث‌های ساخته شده روی آن‌ها هم همین است!



۵۵- با توجه به مساحت مثلث‌های داده شده، S_{ABC} کدام است؟



۱) ۳۳۶ ۲) ۳۱۵
۳) ۳۱۸ ۴) ۳۲۷



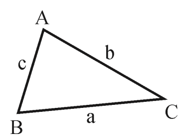
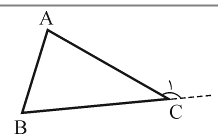
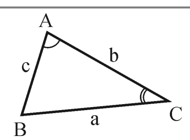
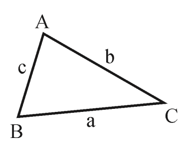
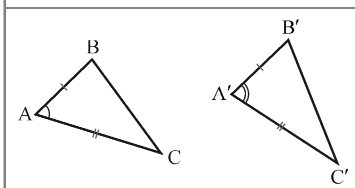
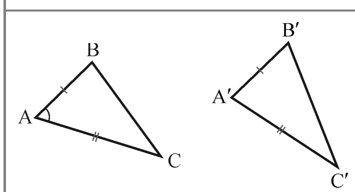
● اگر اضلاع مثلث را در یک جهت به اندازه‌ی خودشان امتداد دهیم، مثلثی به‌وجود می‌آید که مساحتش هفت برابر مساحت مثلث اولیه است. $S_{MNP} = ۷S_{ABC}$

و اگر اضلاع مثلث را در یک جهت و به اندازه‌ی n برابر هر ضلع امتداد دهیم تا مثلثی جدید حاصل شود به‌نام MNP،

در این صورت: $\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = ۳n(n+۱)+۱$

نامساوی‌ها در مثلث

● **قضایای اصلی نامساوی‌ها** سراسری ۸۰ و ۸۵

نامساوی بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین ضلع	بزرگ‌ترین ضلع، از $\frac{۱}{۳}$ محیط مثلث، کوچک‌تر نیست. $a \ge b \ge c \Rightarrow \begin{cases} a \ge \frac{۲p}{۳} \\ ۰ < c \le \frac{۲p}{۳} \end{cases}$ کوچک‌ترین ضلع از $\frac{۱}{۳}$ محیط، بزرگ‌تر نیست.	
نامساوی زاویه‌ی خارجی	زاویه‌ی خارجی از هر یک از زاویه‌های داخلی غیر مجاور خود بزرگ‌تر است. خارجی $\hat{C}_۱ \Rightarrow \hat{C}_۱ > \hat{A} \quad , \quad \hat{C}_۱ > \hat{B}$	
نامساوی ضلع و زاویه‌ی روبه‌روی آن	در یک مثلث هر ضلعی بزرگ‌تر باشد، زاویه‌ی روبه‌رویش نیز بزرگ‌تر است و برعکس. $a > c \Leftrightarrow \hat{A} > \hat{C}$	
نامساوی مثلثی (**حمار**)	در یک مثلث هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر است. $a < b + c$ $b < a + c$ $c < a + b$	
قضیه‌ی **لولا** در دو مثلث	$\begin{cases} AB = A'B' \\ \hat{A} < \hat{A}' \\ AC = A'C' \end{cases} \Rightarrow BC < B'C'$	
عکس قضیه‌ی لولا در دو مثلث	$\begin{cases} AB = A'B' \\ BC < B'C' \\ AC = A'C' \end{cases} \Rightarrow \hat{A} < \hat{A}'$	

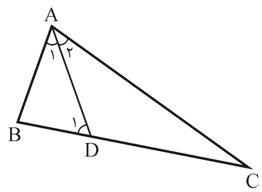
سراسری ۸۲

- *نامساوی مثلثی یه شکل ساده و خلاصه شده داره که هر ۳ نامساوی حمار را شامل می‌شه، اونم اینه که* اگه a یک ضلع مثلث باشه، (هر کدومش) آن‌وقت، $|b-c|<a<b+c$؛ که فارسی‌اش می‌شه: *هر ضلع مثلث از جمع دوتای دیگه کوچک‌تر و از تفاضل اون دوتا بزرگ‌تر است.*

- *اگه بدونیم کدوم ضلع مثلث از همه بزرگ‌تره، اون‌وقت نامساوی مثلثی به یک شکل بسیار ساده و سریع (از جهت محاسبه) تبدیل می‌شه!* مثلاً اگر a بزرگ‌ترین ضلع مثلث باشه، کافیه بنویسیم، $a<b+c$! *این جمله دوتای دیگه رو هم در خودش داره!*

۵۶- اضلاع مثلثی سه عدد طبیعی مضرب ۳ و متوالی هستند. اگر طول بزرگ‌ترین ضلع مثلث حداکثر ۳۰ باشد، برای این مثلث چند جواب وجود دارد؟

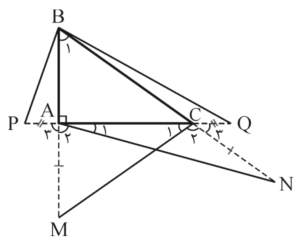
۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹



۵۷- در شکل روبه‌رو، AD نیمساز و $\hat{D}_1=۳۵^\circ$ است. اگر اندازه‌ی زاویه‌های B و C طبیعی باشد، $\hat{B}+\hat{C}$ حداقل کدام است؟

۱) ۱۰۸° ۲) ۱۰۹°

۳) ۱۱۰° ۴) ۱۱۱°



۵۸- در شکل مقابل، مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است. از بین جملات زیر چندتا درست است؟

الف) $AN>MC$ ب) $BN>AN$ ج) $PM<QN$

۱) هیچ‌یک ۲) ۱

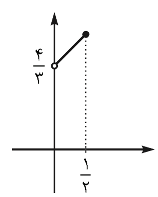
۳) ۲ ۴) ۳

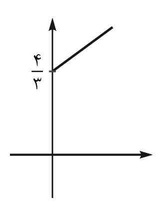
- اگر a، b و c سه ضلع مثلثی باشند، ka، kb و kc به شرط مثبت بودن k نیز اضلاع مثلث‌اند. اما $a+m$، $b+n$ و $c+t$ با این شرط اضلاع مثلث‌اند که خود m، n و t بتوانند مثلثی بسازند. *یعنی شرط نامساوی مثلثی را داشته باشند!*

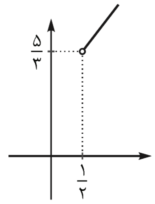
۵۹- اگر a، b و c اضلاع مثلثی باشند، کدام سه عدد لزوماً سه ضلع مثلث نیستند؟

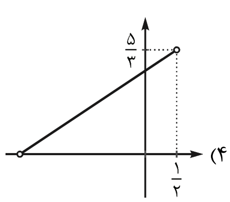
۱) $ac\,,\,ab\,,\,a^۲$ ۲) $\frac{bc}{a}\,,\,\frac{b^۲}{a}\,,\,b$ ۳) $\frac{a}{bc}\,,\,\frac{۱}{c}\,,\,\frac{۱}{b}$ ۴) $c+۷\,,\,b+۴\,,\,a+۲$

۶۰- مثلثی با اضلاع ۳y، ۲x و ۶ مفروض است. اگر بدانیم $۳y=۲x+۴$، کدام قسمت این خط محدوده‌ی قابل قبول x و y است؟

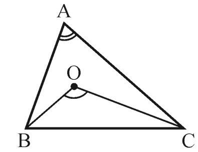
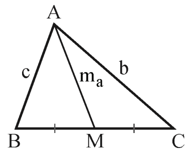
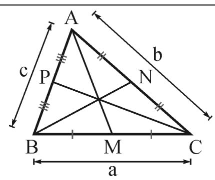
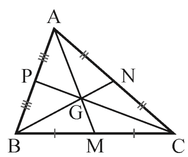
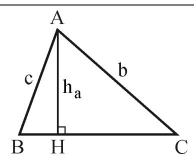
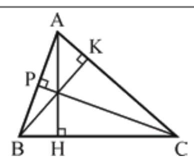
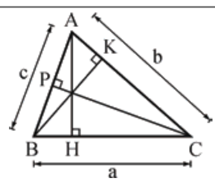
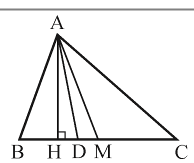
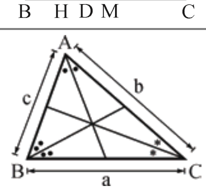
۱)


۲)


۳)


۴)


نامساوی‌های مربوط به اجزای فرعی مثلث

نامساوی نقطه‌ی دلخواه		اگر O نقطه‌ای دلخواه درون مثلث ABC باشد: $\hat{O} > \hat{A} \quad , \quad BC < OB + OC < AB + AC$ $p < OA + OB + OC < ۲p$	
نامساوی‌های مربوط به میانه‌ها	یک میانه	هر میانه از نصف مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر و از نصف تفاضل آن‌ها بزرگ‌تر است. $\frac{\lvert b-c \rvert}{۲} < m_a < \frac{b+c}{۲} \quad , \quad \frac{\lvert a-c \rvert}{۲} < m_b < \frac{a+c}{۲}$ $\frac{\lvert a-b \rvert}{۲} < m_c < \frac{a+b}{۲}$	
	سه میانه	سه میانه‌ی هر مثلث، خود تشکیل مثلثی می‌دهند! یعنی در نامساوی مثلثی صدق می‌کنند. $\lvert m_b - m_c \rvert < m_a < m_b + m_c$	
	مجموع میانه‌ها	مجموع سه میانه‌ی مثلث از محیط کوچک‌تر و از $\frac{۳}{۴}$ محیط بزرگ‌تر است. $\frac{۳}{۴}(۲p) = \frac{۳p}{۲} < m_a + m_b + m_c < ۲p$	
نامساوی‌های مربوط به ارتفاع‌ها	یک ارتفاع	هر ارتفاع از نصف مجموع دو ضلع دیگر مثلث کوچک‌تر است. $h_a < \frac{b+c}{۲} \quad , \quad h_b < \frac{a+c}{۲} \quad , \quad h_c < \frac{a+b}{۲}$	
	سه ارتفاع	معکوس اندازه‌های سه ارتفاع، خود مثلثی جدید می‌سازند (در نامساوی مثلثی صدق می‌کنند!) $\lvert \frac{۱}{h_b} - \frac{۱}{h_c} \rvert < \frac{۱}{h_a} < \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c}$	
	مجموع ارتفاع‌ها	مجموع اندازه‌ی سه ارتفاع مثلث، از نصف محیط بزرگ‌تر و از محیط کوچک‌تر است. $p < h_a + h_b + h_c < ۲p$	
میانه و ارتفاع و نیمساز یک رأس		برای یک رأس در مثلث، میانه از نیمساز و نیمساز از ارتفاع بزرگ‌تر است. $AH \le AD \le AM$ یا $h_a \le d_a \le m_a$	
نامساوی مربوط به نیمسازها		$h_a + h_b + h_c \le d_a + d_b + d_c \le m_a + m_b + m_c$ $p < d_a + d_b + d_c < ۲p$	

۶۱- در مثلثی میانه، ارتفاع و نیمساز نظیر رأس B، به ترتیب عبارت‌انداز، $6x-2$، x^2+4 و $5x$، چند جواب صحیح برای x وجود دارد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶۲- در مثلث ABC، داریم $h_a = 4BC$. کدام مورد در آن درست است؟

۱) $\hat{A} > 90^\circ$ ۲) $\hat{A} < 90^\circ$ ۳) $\hat{A} > \hat{B}$ ۴) $\hat{A} < \hat{C}$

۶۳- اندازه‌ی ضلع‌های مثلثی ۵، $x-2$ و $7-x$ هستند. اگر مجموع سه میانه‌ی مثلث $3x$ باشد، حدود x کدام است؟

۱) $2 < x < \frac{10}{3}$ ۲) $\frac{5}{2} < x < 7$ ۳) $2 < x < 7$ ۴) $\frac{5}{2} < x < \frac{10}{3}$

۶۴- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای طول وتر $2m+4$ و ارتفاع وارد بر وتر $\frac{5m}{2}$ است. کدام گزینه نمی‌تواند مقدار m باشد؟

۱) $\frac{2}{7}$ ۲) $\frac{7}{5}$ ۳) $\frac{6}{5}$ ۴) $\frac{11}{10}$

۶۵- اندازه‌های سه میانه‌ی مثلثی، تصاعد حسابی با قدرنسبت ۴ و سه ارتفاع آن، تصاعد هندسی با قدرنسبت $\frac{4}{5}$ می‌سازند. بین این مثلث‌ها، مثلثی که کوچک‌ترین ابعاد را دارد و طول میانه‌ها و ارتفاع‌هایش اعداد صحیح هستند، را درنظر بگیرید. مجموع طول میانه و ارتفاع بزرگ‌ترین ضلع آن کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۶ ۳) $\frac{141}{25}$ ۴) $\frac{341}{25}$

- در یک مثلث با اضلاع نابرابر، اگر یک زاویه 60° باشد، ضلع مقابل به آن، ضلع متوسط مثلث است. یا ضلع مقابل به زاویه‌ی 60° در مثلث، نه کوچک‌ترین ضلع است نه بزرگ‌ترین ضلع.

جملات معادل: *«زاویه‌ی روبه‌رو به بزرگ‌ترین ضلع مثلث، همیشه از 60° بیشتر است.»*

«زاویه‌ی روبه‌رو به کوچک‌ترین ضلع مثلث، همیشه از 60° کم‌تر است»

- اگر در مثلثی برای عدد طبیعی n، که $n > 2$ است، داشته باشیم $a^n = b^n + c^n$، آن‌گاه زاویه‌ی روبه‌روی a یعنی $\hat{A}$، در نامساوی $60^\circ < \hat{A} < 90^\circ$ صدق می‌کند.

- *از قبل می‌دانید چگونه باید نوع مثلث را با سه ضلع ارتباط دهید، حالا می‌خواهیم این نامساوی را کامل‌تر کنیم:*

$\hat{A} < 90^\circ \iff (b-c)^2 < a^2 < b^2 + c^2$
$\hat{A} = 90^\circ \iff a^2 = b^2 + c^2$
$\hat{A} > 90^\circ \iff b^2 + c^2 < a^2 < (b+c)^2$

آزاد ۸۴

۶۶- در مثلثی $a = 12$، $c = 9$ و $\hat{B}$ منفرجه است. چند جواب صحیح برای b وجود دارد؟

۱) ۲۰ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) بی‌شمار