فصل ۷
اصل شمول و عدم شمول

اصل شمول و عدم شمول

اصل شمول و عدم شمول دوتایی

تعداد عضوهایی که به A یا به B تعلق دارند برابر است با: $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

خب این‌که حرف جدیدی نیست! حق با شماست… اصل شمول و عدم شمول حرف جدیدی نیست و فقط بیان فرمول تعداد اعضای $A\cup B$ است؛ اما مسئله‌هایش به زبان دیگری بیان می‌شود.

اصل شمول: تعداد عضوهایی که به حداقل یکی از دو مجموعه تعلق دارند $=|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=$ |اولی| + |دومی| − |هر دو|

اصل عدم شمول: تعداد عضوهایی که به هیچ‌یک از مجموعه‌ها تعلق ندارد (نه به A و نه به B) $=|(A\cup B)'|=|\underbrace{S}_{\text{کل}}|-|A\cup B|$

تعداد اعداد طبیعی کم‌تر یا مساوی n که بر k بخش‌پذیرند برابر است با $[\frac{n}{k}]$؛

پس تعداد اعداد طبیعی از m تا n، که بر k بخش‌پذیرند برابر است با: $[\frac{n}{k}]-[\frac{m-1}{k}]$

تست: چند عضو از مجموعه‌ی $\{۲۲,۲۳,\dots,۲۲۰\}$ بر ۳ یا ۷ بخش‌پذیرند؟

۱) ۸۴ ۲) ۸۵ ۳) ۸۶ ۴) ۸۷

پاسخ: اول مواد لازم برای فرمول را به دست می‌آوریم:

$|A|=$ تعداد مضارب ۳ $=[\frac{۲۲۰}{۳}]-[\frac{۲۱}{۳}]=۷۳-۷=۶۶$

$|B|=$ تعداد مضارب ۷ $=[\frac{۲۲۰}{۷}]-[\frac{۲۱}{۷}]=۳۱-۳=۲۸$

$|A\cap B|=$ تعداد مضارب ۳،۷ $=$ تعداد مضارب ۲۱ $=[\frac{۲۲۰}{۲۱}]-[\frac{۲۱}{۲۱}]=۱۰-۱=۹$

حالا طبق اصل شمول:

$|A\cup B|=$ تعداد مضارب ۳ یا ۷ $=|A|+|B|-|A\cap B|=۶۶+۲۸-۹=۸۵$

اگر کسی اشتباه کند و بگوید از ۲۲ تا ۲۲۰، ۱۹۹ تا عدد داریم، این‌طوری حل می‌کند: $[\frac{۱۹۹}{۳}]+[\frac{۱۹۹}{۷}]-[\frac{۱۹۹}{۲۱}]=۶۶+۲۸-۹=۸۵$

در این‌جا درست به دست می‌آورد اما در مجموعه‌ی $\{۲۱,۲۲,\dots,۲۲۰\}$ غلط می‌شود. پس لطفاً از این کارها نکنید!

تست: چند عدد طبیعی سه‌رقمی، مربع کامل یا مضرب ۳ هستند؟

۱) ۳۱۵ ۲) ۳۱۶ ۳) ۳۱۴ ۴) ۳۱۷

پاسخ: $|B|=$ تعداد مضارب ۳ $=[\frac{۹۹۹}{۳}]-[\frac{۹۹}{۳}]=۳۳۳-۳۳=۳۰۰$

$|A|=$ تعداد مربع‌های کامل $=|\{\underbrace{۱۰^۲}_{۱۰۰},۱۱^۲,\dots,\underbrace{۳۱^۲}_{۹۶۱}\}|=۲۲$

$|A\cap B|=$ تعداد مشترک‌ها $=|\{۱۲^۲,۱۵^۲,۱۸^۲,۲۱^۲,۲۴^۲,۲۷^۲,۳۰^۲\}|=۷\Rightarrow |A\cup B|=۳۰۰+۲۲-۷=۳۱۵$

تست: چند عدد طبیعی ۴ رقمی فاقد صفر، حتماً ارقام ۲ و ۴ را دارند؟

۱) ۷۴۰ ۲) ۷۵۰ ۳) ۷۶۰ ۴) ۷۷۰

دقت کنید که در این مسائل از اصل عدم شمول می‌رویم:

پاسخ: تعداد کل $=|S|=\underbrace{۹\times۹\times۹\times۹}_{۱,۲,\dots,۹}=۹^۴=۶۵۶۱$ حتماً ۲ و ۴ دارند = کل − ۲ یا ۴ را ندارند

۲ ندارند $=|A|=\underbrace{۸\times۸\times۸\times۸}_{۱,۳,\dots,۹}=۸^۴=۴۰۹۶$ ۴ ندارند $=|B|=۸^۴=۴۰۹۶$

۴ و ۲ ندارند $=|A\cap B|=\underbrace{۷\times۷\times۷\times۷}_{۱,۳,۵,۶,۷,۸,۹}=۷^۴=۲۴۰۱$

۲ یا ۴ ندارند $=|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=۴۰۹۶+۴۰۹۶-۲۴۰۱=۸۱۹۲-۲۴۰۱=۵۷۹۱$

۲ و ۴ دارند $=|S|-|A\cup B|=۶۵۶۱-۵۷۹۱=۷۷۰$

این حجم محاسبات قبلاً در کنکور سراسری آمده است!

این اعداد حتماً ۲ و ۴ را دارند. دو رقم دیگر را برمی‌داریم و می‌چینیم.

الف) ۲، ۴ و دوتا رقم متمایز دیگر از بین ۱، ۳، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ داریم: $\binom{۷}{۲}\times۴! \Leftarrow$ ۵۰۴ تا

ب) ۲، ۴ و دوتا رقم یکسان از بین ۱، ۳، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ داریم: $\binom{۷}{۱}\times\frac{۴!}{۲!} \Leftarrow$ ۸۴ تا

ج) ۲، ۴ و یک رقم دیگر از بین ۱، ۳، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ و یک رقم ۲ یا ۴ دیگر داریم: $\binom{۷}{۱}\times\frac{۴!}{۲!}\times\binom{۲}{۱} \Leftarrow$ ۱۶۸تا

د) ۲، ۴، ۲، ۴ $\Leftarrow \frac{۴!}{۲!۲!} \Leftarrow$ ۶ تا

هـ) ۲، ۴، ۲، ۲ $\Leftarrow \frac{۴!}{۳!} \Leftarrow$ ۴ تا

و) ۲، ۴، ۴، ۴ $\Leftarrow \frac{۴!}{۳!} \Leftarrow$ ۴ تا

جمعاً می‌شود: $۵۰۴+۸۴+۱۶۸+۶+۴+۴=۷۷۰$

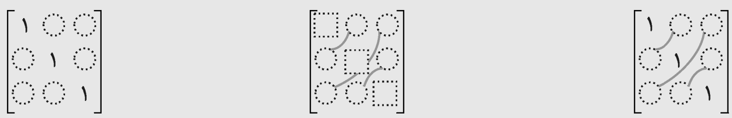
تست: روی مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳\}$ چند رابطه داریم که نه بازتابی و نه پادتقارنی باشند؟

۱) ۲۵۹ ۲) ۲۴۸ ۳) ۲۵۳ ۴) ۲۹۲

پاسخ: نه بازتابی نه پادتقارنی = کل − بازتابی یا پادتقارنی = کل − (بازتابی + پادتقارنی − بازتابی و پادتقارنی)

$=۲^۹-(۲^۶+۲^۳\times۳^۳-۳^۳)=۵۱۲-(۶۴+۲۱۶-۲۷)=۵۱۲-۲۵۳=۲۵۹$

ماتریس‌ها را هم ببینید:



بازتابی و پادمتقارن $۳^۳$ حالت   پادمتقارن $۳^۳\times۲^۳$ حالت   بازتابی $۲^۶$ حالت

اصل شمول و عدم شمول سه‌تایی و بیشتر

این هم تعداد اعضای اجتماع سه مجموعه:

تعداد اعضایی که به حداقل یکی از سه مجموعه تعلق دارند $=|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

و اصل عدم شمول:

تعداد اعضایی که به هیچ‌یک از A، B و C تعلق ندارند = تعداد اعضایی که نه به A و نه به B و نه به C تعلق دارند $=|A'\cap B'\cap C'|=|S|-|A\cup B\cup C|$

تست: چند عدد طبیعی سه‌رقمی بر هیچ‌یک از اعداد ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر نیستند؟

۱) ۳۴۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۲۶۰ ۴) ۳۶۰

پاسخ:

$|S| = \text{تعداد کل سه‌رقمی‌ها} = 999-99=900$

$|A| = \text{تعداد مضارب ۲} = [\frac{999}{2}]-[\frac{99}{2}]=499-49=450$

$|B| = \text{تعداد مضارب ۳} = [\frac{999}{3}]-[\frac{99}{3}]=333-33=300$

$|C| = \text{تعداد مضارب ۵} = [\frac{999}{5}]-[\frac{99}{5}]=199-19=180$

$|A\cap B| = \text{تعداد}\underbrace{\text{مضارب ۲ و ۳}}_{\text{مضارب ۶}} = [\frac{999}{6}]-[\frac{99}{6}]=166-16=150$

$|A\cap C| = \text{تعداد}\underbrace{\text{مضارب ۲ و ۵}}_{\text{مضارب ۱۰}} = [\frac{999}{10}]-[\frac{99}{10}]=99-9=90$

$|B\cap C| = \text{تعداد}\underbrace{\text{مضارب ۳ و ۵}}_{\text{مضارب ۱۵}} = [\frac{999}{15}]-[\frac{99}{15}]=66-6=60$

$|A\cap B\cap C| = \text{تعداد}\underbrace{\text{مضارب ۲، ۳ و ۵}}_{\text{مضارب ۳۰}} = [\frac{999}{30}]-[\frac{99}{30}]=33-3=30$

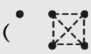
$|S|-|A\cup B\cup C|=900-(450+300+180-150-60-90+30)=900-660=240$

تست: در چند گراف ساده با رئوس a، b، c، d و e، هیچ‌یک از رأس‌های a، b و c منزوی نیستند؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۹۲ ۳) ۴۳۲ ۴) ۸۵۴

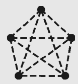
پاسخ: a، b و c منزوی نیستند = تعداد کل − a یا b یا c منزوی‌اند

دقت کنید که تعداد حالت‌ها با هم مساوی است:

$|A|=|B|=|C| = \text{تعداد حالاتی که یک رأس منزوی است} = 2^6=64$ ()

$|A\cap B|=|A\cap C|=|B\cap C| = \text{تعداد حالاتی که دو رأس منزوی‌اند} = 2^3=8$ ()

$|A\cap B\cap C| = \text{تعداد حالاتی که سه رأس منزوی‌اند} = 2^1=2$ ()

$|S| = \text{تعداد کل حالات} = 2^{10}$ ()

پس داریم:

$|S|-|A\cup B\cup C|=|S|-(|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|)$

$=2^{10}-(2^6+2^6+2^6-2^3-2^3-2^3+2^1)=1024-(3\times 64-3\times 8+2)=1024-(192-24+2)=854$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- ۱۷ نفر از دانش‌آموزان یک کلاس، در درس فیزیک یا شیمی تجدید شده‌اند. اگر ۱۱ نفر در فیزیک و ۱۳ نفر در شیمی تجدید شده باشند، چند نفر در هر دو درس تجدید شده‌اند؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

۲- از ۵۱ دانش‌آموز یک دبیرستان، ۳۵ نفر در کلاس ادبیات، ۳۱ نفر در کلاس عربی و ۲۳ نفر در هر دو کلاس شرکت کرده‌اند. چند نفر در هیچ یک از دو کلاس شرکت ننموده‌اند؟ *(سراسری ۸۲)*

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۸

۳- در مورد مجموعه‌های A، B و C می‌دانیم که $|A|=4$، $|B|=3$، $|C|=5$، $|A\cap B|=1$، $|A\cap C|=3$، $|A\cap B\cap C|=1$ و $|A\cup B\cup C|=7$. حاصل $|B\cap C|$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴- در یک باشگاه ورزشی، ۲۹ نفر به ورزش فوتبال، ۳۳ نفر به ورزش والیبال و ۲۴ نفر به ورزش بسکتبال می‌پردازند. ۶ نفر از آن‌ها فوتبال و والیبال، ۸ نفر فوتبال و بسکتبال و ۴ نفر والیبال و بسکتبال بازی می‌کنند. دو نفر از آن‌ها هم هستند که در هر سه رشته فعالیت می‌کنند. این باشگاه در این سه رشته در مجموع چند عضو دارد؟

۱) ۶۸ ۲) ۷۰ ۳) ۷۲ ۴) ۷۴

۵- در یک نظرخواهی از ۱۰۰ دانش‌آموز، ۶۰ نفر مجله‌ی A، ۵۰ نفر مجله‌ی B، و ۵۰ نفر مجله‌ی C را می‌خوانند. اگر ۳۰ نفر مجله B و C، ۲۰ نفر مجله A و C، ۲۰ نفر مجله A و B را بخوانند و ۱۰ نفر هر سه مجله را بخوانند، چند نفر هیچ مجله‌ای نمی‌خوانند؟

۱) صفر ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

۶- در بین اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰۰ چند عدد وجود دارد که بر ۳ یا بر ۷ بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۸۳ ۲) ۸۴ ۳) ۸۵ ۴) ۸۶

۷- چند عدد ۳ رقمی وجود دارد که نه بر ۵ بخش‌پذیر باشد، نه بر ۶؟ *(سراسری ۸۲)*

۱) ۵۴۰ ۲) ۵۷۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۶۳۰

۸- چند عضو از مجموعه‌ی $\{n \in \mathbb{N} \mid ۱۵۰ < n < ۵۰۰\}$ نه بر ۷ تقسیم‌پذیرند و نه بر ۱۱؟ *(خارج ۹۱)*

۱) ۲۷۱ ۲) ۲۷۲ ۳) ۲۷۳ ۴) ۲۷۴

۹- در بین اعداد ۱ تا ۱۰۰، چند عدد هستند که بر هیچ‌یک از اعداد ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر نیستند؟

۱) ۲۹ ۲) ۲۸ ۳) ۲۷ ۴) ۲۶

۱۰- چند عدد طبیعی که از ۲۰۰۱ بزرگ‌تر نیستند، مضرب ۳ یا ۴ اند اما مضرب ۵ نیستند؟

۱) ۸۰۱ ۲) ۷۹۲ ۳) ۷۸۱ ۴) ۷۶۲

۱۱- چند عدد چهاررقمی با ارقام ۱,۲,۳,۴ وجود دارد که در هر یک از آن‌ها رقم‌های ۲ و ۴ حداقل یک بار ظاهر شوند؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۰۴ ۳) ۱۱۶ ۴) ۱۲۰

۱۲- چند عدد سه‌رقمی وجود دارد که در آن‌ها هر یک از رقم‌های ۳ و ۶، حداقل یک بار ظاهر شوند؟ *(سراسری ۸۸)*

۱) ۵۴ ۲) ۵۲ ۳) ۴۸ ۴) ۵۶

۱۳- چند عدد ۴ رقمی در مبنای ۵ وجود دارد که هر یک از ارقام ۲، ۳ و ۴ را حداقل یک بار داشته باشد؟

۱) ۶۴ ۲) ۷۸ ۳) ۸۶ ۴) ۹۲

۱۴- در چند جایگشت از حروف a a b b c هیچ دو حرف یکسانی کنار هم قرار نمی‌گیرند؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۲۱

۱۵- در چند جایگشت از حروف a a b b c c هیچ دو حرف یکسانی کنار هم قرار نمی‌گیرند؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۰ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴

۱۶- چند رابطه که بر روی مجموعه‌ی $A = \{۱,۲,۳\}$ نوشته می‌شود، نه متقارن است نه پادمتقارن؟

۱) ۲۴۰ ۲) ۲۳۲ ۳) ۲۴۸ ۴) ۲۵۲

۱۷- ۵ کبوتر متمایز به چند طریق می‌توانند در سه لانه‌ی متمایز قرار بگیرند، به طوری که در هر لانه حداقل یک کبوتر قرار بگیرد؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۶۲ ۳) ۱۷۲ ۴) ۱۸۶

۱۸- به چند طریق می‌توان چهار نامه‌ی a، b، c و d را درون چهار پاکت A، B، C و D قرار داد، به شرطی که فقط یکی از نامه‌ها درون پاکت هم‌نام خود قرار گیرد؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۱۹- به چند روش می‌توان بین ۵ روستا جاده‌هایی احداث کرد، به طوری که دقیقاً ۲ روستا منفرد باشند؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۴۰

۲۰- به چند طریق می‌توان بین چهار روستای A، B، C و D جاده کشید، به شرطی که هیچ روستایی منفرد باقی نماند؟ *(کتاب درسی)*

۱) ۲۴ ۲) ۴۱ ۳) ۵۳ ۴) ۵۶

۲۱- ۴ نفر راننده که هر کدام یک اتومبیل دارند، در یک محل کار می‌کنند. این ۴ نفر به چند طریق می‌توانند اتومبیل‌های خود را با هم عوض کنند، به قسمی که هیچ‌کدام اتومبیل خود را نرانند؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۸ ۳) ۹ ۴) ۶

معادله‌ی خطی با ضرائب واحد

معادله‌ی $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ را معادله‌ی سیاله‌ی خطی با ضرائب واحد می‌نامیم. تأکیدمان روی کلمه‌ی خطی برای این است که مجهول‌ها توان ندارند (توان همگی ۱ است). این معادله را در مسائل زیر می‌بینیم:

توزیع n شیء یکسان در k جعبه‌ی متمایز؛ انتخاب دسته‌گلی با n شاخه از بین k نوع گل؛ توزیع n سکه بین k نفر.

دقت کنید که x_i ها (مجهول‌ها) اعداد صحیح و نامنفی (یعنی عدد حسابی) هستند: $x_i = ۰,۱,۲,۳,\ldots$

یعنی ممکن است در بعضی از جعبه‌ها هیچ شیئی نباشد، از یک یا چند نوع گل اصلاً برنداریم و به بعضی‌ها اصلاً سکه نرسد.

برای حل معادله‌ی سیاله، باید $k-۱$ تا دیوار بین n تا شیء قرار دهیم تا سهم هریک از k نفر معلوم شود. مثلاً برای تقسیم ۵ سکه بین ۳ نفر، معادله‌ی $x_۱+x_۲+x_۳=۵$ ساخته می‌شود. حالا به شکل‌های زیر دقت کنید.

$x_۱=۰$	$x_۱=۱$	$x_۱=۳$	$x_۱=۲$
$x_۲=۵$	$x_۲=۰$	$x_۲=۲$	$x_۲=۲$
$x_۳=۰$	$x_۳=۴$	$x_۳=۰$	$x_۳=۱$

پس تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله، برابر با تعداد حالت‌های کنار هم قرارگرفتن $k-۱$ دیوار و n سکه است. این تعداد برابر است با:

$$\binom{n+k-۱}{k-۱} \quad \text{یا} \quad \frac{(n+k-۱)!}{n!(k-۱)!}$$

پس این شد:

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی خطی $x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n$ برابر است با: $\binom{n+k-۱}{k-۱}$

n عدد ثابت سمت راست معادله و k تعداد مجهول‌ها است.

تست: چند دسته گل متفاوت با ۷ شاخه از بین ۴ نوع گل می‌توان برداشت؟

۱) ۳۵ ۲) ۲۸ ۳) ۲۴۰۱ ۴) ۱۲۰

پاسخ: $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۷$

$$\text{تعداد جواب صحیح و نامنفی}=\binom{n+k-۱}{k-۱}\xrightarrow[k=۴]{n=۷}=\binom{۷+۴-۱}{۴-۱}=\binom{۱۰}{۳}=۱۲۰$$

تست: معادله‌ی $x_۳+x_۵+۲=۸$ چند دسته جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۱) ۳۶ ۲) ۲۱۰ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: دقت کنید که این معادله در واقع $x_۳+x_۵=۶$ است، پس $n=۶$ و $k=۲$ (تعداد مجهول‌ها) و داریم: $\binom{۶+۲-۱}{۲-۱}=\binom{۷}{۱}=۷$

تست: شش شکلات یکسان را به چند طریق می‌توان بین علی، سروش و رسول تقسیم کرد که به رسول دقیقاً ۲ شکلات برسد؟

۱) ۲۸ ۲) ۵ ۳) ۲۶ ۴) ۱۳

پاسخ: برای تقسیم شکلات‌ها به معادله‌ی $a+s+r=۶$ می‌رسیم اما چون $r=۲$ است، در واقع $a+s=۴$ و داریم:

$k=۲=$ تعداد افراد $\qquad n=۴=$ تعداد کل $\qquad \binom{۴+۲-۱}{۲-۱}=\binom{۵}{۱}=۵$

چهارتا چیز دیگر هم بدانید:

۱) اگر به جای معادله‌ی خطی، نامعادله‌ی $x_۱+x_۲+\cdots+x_k\le n$ را بدهند (دقت کنید حتماً باید $n\le$ باشد)، با اضافه‌کردن یک مجهول، نامعادله را به معادله تبدیل می‌کنیم:

تست: نامعادله‌ی $x_۱+x_۲+x_۳\le ۷$ چند دسته جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۱) ۲۱ ۲) ۳۶ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۱۰

پاسخ: قرار شد یک مجهول اضافه کنیم و معادله بشود: $x_۱+x_۲+x_۳\le ۷ \Rightarrow x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۷ \xrightarrow[n=۷]{k=۴} \binom{۷+۴-۱}{۴-۱}=\binom{۱۰}{۳}=۱۲۰$

۲) اگر بعضی از مجهول‌ها دارای ضریب یا توان باشند، دیگر معادله‌ی خطی نداریم! بلکه باید به آن مجهول‌ها عدد مناسب بدهیم و حذفشان کنیم.

تست: معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + ۲x_۳^۲ = \frac{۲۰}{x_۳}$ چند دسته جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۱) ۳ ۲) ۱۹ ۳) ۲۲ ۴) ۵۷

پاسخ: این $x_۳$ مزاحم است. مقادیر مختلف به آن می‌دهیم. $x_۳ = ۱$ خوب است: $x_۱ + x_۲ + ۲ = ۲۰ \Rightarrow x_۱ + x_۲ = ۱۸$

$x_۳ = ۲$ هم خوب است: $x_۱ + x_۲ + ۲(۲^۲) = \frac{۲۰}{۲} \Rightarrow x_۱ + x_۲ = ۲$

اما برای $x_۳ = ۳$ یا بیشتر از آن، عدد سمت راست معادله کسری یا منفی می‌شود؛ پس فقط دو حالت شد:

الف) $x_۳ = ۱ \Rightarrow x_۱ + x_۲ = ۱۸ \xrightarrow[k=۲]{n=۱۸} \binom{۱۸+۱}{۱} = ۱۹$:تعداد جواب

ب) $x_۳ = ۲ \Rightarrow x_۱ + x_۲ = ۲ \xrightarrow[k=۲]{n=۲} \binom{۲+۲-۱}{۲-۱} = ۳$:تعداد جواب

پس روی هم $۲۲ = ۳ + ۱۹$ جواب داریم.

چرا با هم جمع کردیم؟

۳) اگر برخی مجهول‌ها دارای شرط از پایین باشند، مثلاً سؤال بگوید $x_۱ \geq b$، اول b تا سکه به نفر $x_۱$ می‌دهیم و سپس $n - b$ تا سکه‌ی باقی‌مانده را بین کل نفرات توزیع می‌کنیم. به زبان ریاضی، تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = n$ با شرط $x_۱ \geq b_۱ , x_۲ \geq b_۲ , \ldots$ برابر است با تعداد جواب‌های معادله‌ی $x'_۱ + x'_۲ + \cdots + x'_k = n - b_۱ - b_۲ - \cdots$. در این‌جا $x'_۱$ یعنی تعداد سکه‌هایی که $x_۱$ علاوه بر b تا (حداقل) می‌گیرد.

دقت کنید که شرط‌ها باید حتماً به فرم $\geq$ باشند، مثلاً به جای $x_۲ > ۵$ باید بگوییم $x_۲ \geq ۶$ (و در نتیجه ۶ تا سکه به نفر ۲ بدهیم).

تست: معادله‌ی خطی $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۵$ چند جواب صحیح با شرایط $x_۱ \geq ۴$ و $x_۲ > ۷$ و $x_۳ \in \mathbb{N}$ دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: قرار شد تمام شرط‌ها $\geq$ باشند.

$$\left.\begin{array}{l} x_۱ \geq ۴ \Rightarrow \text{۴ تا سکه به ۱ بدهیم} \\ x_۲ > ۷ \Rightarrow x_۲ \geq ۸ \Rightarrow \text{۸ تا سکه به ۲ بدهیم} \\ x_۳ \in \mathbb{N} \Rightarrow x_۳ \geq ۱ \Rightarrow \text{۱ سکه به ۳ بدهیم} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{۴+۸+۱=۱۳ سکه مصرف شد و فقط ۲ سکه مانده} \Rightarrow x'_۱ + x'_۲ + x'_۳ = ۲$$

$\xrightarrow[k=۳]{n=۲} \binom{۲+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۴}{۲} = ۶$:تعداد جواب

تست: معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۹$ چند دسته جواب طبیعی دارد؟

۱) ۵۵ ۲) ۴۵ ۳) ۲۸ ۴) ۴۲

صورت‌های دیگر این مثال:

الف) ۹ سکه‌ی یکسان را به چند طریق می‌توان بین سه نفر تقسیم کرد که به هر کدام حداقل یک سکه برسد؟

ب) از میان سه نوع گل رز، یاس و نرگس، به چند طریق دسته‌گلی با ۹ شاخه می‌توان برداشت که از هر نوع گل حداقل یک شاخه باشد؟

ج) ۹ سیب یکسان را در سه جعبه‌ی مختلف به چند طریق می‌توان قرار داد که هیچ جعبه‌ای خالی نماند؟

پاسخ: خب جواب طبیعی یعنی $x_i \geq ۱$؛ پس داریم: $x_۱ \geq ۱$، $x_۲ \geq ۱$ و $x_۳ \geq ۱$ یعنی به هر کس یک سکه می‌دهیم و داریم:

$$x'_۱ + x'_۲ + x'_۳ = ۹-۱-۱-۱ = ۶ \xrightarrow[k=۳]{n=۶} \binom{۶+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۸}{۲} = ۲۸$$

گاهی حفظ می‌کنند که تعداد جواب‌های طبیعی معادله‌ی خطی برابر است با $\binom{n-۱}{k-۱}$.

۴) اگر مجهول‌هایی بودند که شرط از بالا داشتند، مثلاً $x_۱ < a$ از شمارش مکمل می‌رویم؛ یعنی تعداد کل جواب‌ها را حساب کرده و منهای تعداد جواب‌هایی می‌کنیم که $x_۱ \not< a$ یعنی $x_۱ \geq a$ باشد.

دقت کنید که خلاف $x_۱ < a$، به صورت $x_۱ \geq a$ شد اما خلاف $x_۱ \leq a$ به صورت $x_۱ \geq a + ۱$ است. مثلاً:

تعداد جواب‌هایی که $x_۱ \leq ۷$ است = تعداد کل جواب‌ها − تعداد جواب‌هایی که $x_۱ \geq ۸$ است

تعداد جواب‌هایی که $x_۲ < ۵$ است = تعداد کل جواب‌ها − تعداد جواب‌هایی که $x_۲ \geq ۵$ است

به این تفاوت دقت کنید.

حالا اگر بیش از یک مجهول دارای شرط از بالا بود، مجبوریم تعداد کل جواب‌های مردود را با اصل شمول و عدم شمول حساب کرده و از کل برداریم.

تست: معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۲۰$ چند جواب صحیح و نامنفی با شرایط $x_۱ \leq ۷$ و $x_۲ < ۱۰$ دارد؟

۱) ۷۰ ۲) ۷۷ ۳) ۸۰ ۴) ۸۸

پاسخ: تعداد جواب‌هایی که $x_۱ \leq ۷$ و $x_۲ < ۱۰$ است = تعداد کل جواب‌ها − تعداد جواب‌هایی که $x_۱ \geq ۸$ یا $x_۲ \geq ۱۰$ است

چرا ۷ به ۸ تبدیل شد اما ۱۰ همان ۱۰ ماند؟ (به فرق $\leq$ و $>$ دقت کردید؟) چرا «و» به «یا» تبدیل شد؟ جواب این سؤال را قبلاً دیده‌اید... به خاطر قانون دمرگان!

تعداد کل جواب‌های معادله − (تعداد جواب‌های $x_۱ \geq ۸$ + تعداد جواب‌های $x_۲ \geq ۱۰$ − تعداد جواب‌های $x_۱ \geq ۸, x_۲ \geq ۱۰$)

= تعداد جواب‌های $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۲۰$

− (تعداد جواب‌های $x'_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۲$ + تعداد جواب‌های $x_۱ + x'_۲ + x_۳ = ۱۰$ − تعداد جواب‌های $x'_۱ + x'_۲ + x_۳ = ۲$)

$$= \binom{۲۰+۲}{۲} - \left[\binom{۱۲+۲}{۲} + \binom{۱۰+۲}{۲} - \binom{۲+۲}{۲}\right] = \binom{۲۲}{۲} - \left[\binom{۱۴}{۲} + \binom{۱۲}{۲} - \binom{۴}{۲}\right] = ۲۳۱ - [۹۱ + ۶۶ - ۶] = ۸۰$$

به دلیل درستی این راه حل فکر کنید:

$x_۱ < ۱۰$ یعنی $x_۱$ می‌توانند از صفر تا ۹ باشد پس ده مقدار مختلف دارد. $x_۲ \leq ۷$ هم یعنی $x_۲$ از صفر تا ۷ است و هشت مقدار دارد؛ پس $۱۰ \times ۸ = ۸۰$ حالت داریم.

اگر مجهولی هم دارای شرط از بالا و هم دارای شرط پایین باشد، مثلاً $۳ \leq x_۱ \leq ۷$ اول حداقل را انجام می‌دهیم. یعنی ۳ تا سکه به $x_۱$ می‌دهیم و حالا داریم $۰ \leq x'_۱ \leq ۴$ دقت کردید؟ سه‌تا سکه داده‌ایم و حالا می‌تواند حداکثر ۴ سکه‌ی دیگر بگیرد. در اصطلاح می‌گوییم طرف چپ شرط را به صفر می‌رسانیم.

مثال: معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۴$ چند جواب با شرایط $۳ \leq x_۱ \leq ۶$ ، $۳ < x_۲ \leq ۷$ و $۲ \leq x_۳$ دارد؟

$$\left.\begin{array}{l} ۳ \leq x_۱ \leq ۶ \Rightarrow ۰ \leq x'_۱ \leq ۳ \\ ۳ < x_۲ \leq ۷ \Rightarrow ۴ \leq x_۲ \leq ۷ \Rightarrow ۰ \leq x'_۲ \leq ۳ \\ ۲ \leq x_۳ \Rightarrow ۰ \leq x'_۳ \end{array}\right\} \Rightarrow x'_۱ + x'_۲ + x'_۳ = ۱۴ - ۳ - ۴ - ۲ = ۵$$

حالا باید مانند مثال قبل معادله را به کمک اصل شمول و عدم شمول حل کنید.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۲۲- معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۰$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی چند جواب دارد؟

۱) $\binom{۱۴}{۴}$ ۲) $\binom{۱۳}{۳}$ ۳) $\binom{۱۴}{۳}$ ۴) $\binom{۱۲}{۴}$

۲۳- معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۵$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

۱) $\binom{۱۵}{۴}$ ۲) $\binom{۱۴}{۴}$ ۳) $\binom{۱۴}{۳}$ ۴) $\binom{۱۵}{۳}$

۲۴- چند دسته‌ی ۳ تایی، از ۵ نوع گل مختلف می‌توان ساخت؟ (تکرار مجاز است.)

۱) ۲۴ ۲) ۳۲ ۳) ۳۵ ۴) ۴۲

۲۵- ۷ کبوتر به چند طریق می‌توانند در ۳ لانه‌ی متمایز قرار گیرند، به طوری که هیچ لانه‌ای خالی نماند؟ *(سراسری ۸۳)*

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰

۲۶- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۷$ با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_\ell = ۲$ برابر است. ℓ کدام است؟ *(خارج ۸۴)*

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۷- معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=17$ با شرط $x_1 \geq 2$ و $x_2 > 3$ و $1 \leq x_3$ چند جواب در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی دارد؟

۱) ۲۸۶ ۲) ۳۶۴ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۵۲

۲۸- ۱۵ هدیه‌ی یکسان را به چند طریق می‌توان بین ۴ نفر تقسیم کرد به طوری که به هر نفر حداقل ۲ هدیه برسد؟

۱) $\binom{17}{3}$ ۲) $\binom{10}{3}$ ۳) $\binom{6}{3}$ ۴) $\binom{14}{3}$

۲۹- به چند طریق می‌توان ۲۵ سیب یکسان را بین ۴ نفر تقسیم کرد، به شرطی که به نفر اول حداقل یک، به نفر دوم حداقل ۲ و به نفر سوم حداقل ۶ سیب برسد؟

۱) $\binom{16}{3}$ ۲) $\binom{17}{3}$ ۳) $\binom{18}{3}$ ۴) $\binom{19}{3}$

۳۰- در چند عدد چهاررقمی مجموع ارقام برابر ۸ است؟

۱) ۸۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۶۵ ۴) ۲۵۲

۳۱- معادله‌ی $x_1+2x_2+2x_3=20$ چند جواب صحیح غیرمنفی دارد؟

۱) ۱۹۰ ۲) ۶۶ ۳) ۹۵ ۴) ۶۰

۳۲- معادله‌ی $x+y+5z^2=22$ چند دسته جواب صحیح غیرمنفی دارد؟

۱) ۴۱ ۲) ۴۲ ۳) ۴۴ ۴) ۳۹

۳۳- معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=\frac{10}{x_3}$ چند جواب صحیح غیر منفی دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۹

۳۴- نامعادله‌ی $100<(x_1+x_2+x_3)^3<250$ چند جواب طبیعی دارد؟

۱) ۴۹ ۲) ۲۱ ۳) ۱۶ ۴) ۶

۳۵- معادله‌ی $(x_1+x_2)^3+x_3+x_4=20$ چند جواب طبیعی دارد؟

۱) ۲۱ ۲) ۱۱ ۳) ۲۲ ۴) $\binom{23}{20}$

۳۶- به چند طریق می‌توان ۳۰ آب‌نبات یکسان را بین ۴ نفر تقسیم کرد، طوری که تعداد آب‌نبات‌هایی که به هر نفر می‌رسد، مضرب ۳ باشد؟

۱) $\binom{13}{3}$ ۲) $\binom{16}{3}$ ۳) $\binom{20}{3}$ ۴) $\binom{23}{3}$

۳۷- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x+y+z=10$ با شرط $x>y$ کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۲ ۳) ۳۳ ۴) ۳۶

۳۸- نامعادله‌ی $x_1+x_2+x_3 \leq 12$ در مجموعه‌ی $\{0,1,2,...\}$ چند جواب دارد؟

۱) $\binom{15}{2}$ ۲) $\binom{14}{11}$ ۳) $\binom{14}{2}$ ۴) $\binom{15}{12}$

۳۹- نامعادله‌ی $x+y+z \leq 13$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

۱) $\binom{13}{2}$ ۲) $\binom{13}{3}$ ۳) $\binom{13}{4}$ ۴) $\binom{14}{4}$

۴۰- نامعادله‌ی $x+y+z \leq 15$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح با شرایط $x \geq 3$ ، $y \geq 3$ و $z \geq 4$ چند جواب دارد؟

۱) $\binom{8}{3}$ ۲) $\binom{9}{3}$ ۳) $\binom{10}{3}$ ۴) $\binom{11}{3}$

۴۱- معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=9$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی با شرط $x_1 \leq 3$ چند جواب دارد؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۶ ۳) ۲۱ ۴) ۱۵

۴۲- دستگاه معادلات $\begin{cases} a+b+c=8 \\ x+y+z=10 \end{cases}$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

۱) ۵۷۶ ۲) ۵۶۷ ۳) ۷۷۶ ۴) ۷۵۶

۴۳- ۶ نوشابه‌ی یکسان و ۵ کیک یکسان را به چند طریق بین ۴ نفر می‌توان تقسیم کرد، به طوری که به هر نفر حداقل یک کیک برسد؟

۱) ۲۵۲ ۲) ۳۳۶ ۳) ۱۲۶۰ ۴) ۱۶۴۰

۴۴- تعداد جملات حاصل از بسط $(a+b+c)^{10}$ کدام است؟

۱) ۷۸ ۲) ۶۶ ۳) ۵۵ ۴) ۴۵

۴۵- اگر از بسط $(x+3y-2z)^n$، ۶۶ جمله ایجاد شود، n کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۴۶- در بسط $(a+b+c+d)^7$ چند جمله وجود دارد که شامل a باشد؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۸۴ ۳) ۸۰ ۴) ۱۰۰

۴۷- به چند طریق می‌توان ۹ جایزه را بین ۵ دانش‌آموز تقسیم کرد، به طوری که حداقل ۳ نفر جایزه بگیرند؟

۱) ۵۶۰ ۲) ۶۳۰ ۳) ۷۰۰ ۴) ۸۴۰

۴۸- به چند طریق می‌توان ده توپ یکسان را در ده جعبه‌ی متمایز جای داد، به طوری که دقیقاً ۳ جعبه خالی باشد؟

۱) $\binom{9}{3}5!$ ۲) $\binom{10}{3}\binom{7}{3}$ ۳) $\binom{10}{3}7!$ ۴) $\binom{10}{7}\binom{10}{3}$

۴۹- به چند طریق می‌توان ۱۲ سکه‌ی یکسان را بین ۳ نفر تقسیم کرد، به طوری‌که لااقل به هر کدام یک سکه برسد؟ *(سراسری ۸۷)*

۱) ۵۵ ۲) ۴۸ ۳) ۴۵ ۴) ۳۶

۵۰- به چند طریق می‌توان ۹ کتاب یکسان را در ۵ قفسه‌ی متمایز جای داد، به طوری که در هر قفسه، لااقل یکی از آن‌ها قرار داده شود؟

۱) ۳۵ ۲) ۴۲ ۳) ۵۶ ۴) ۷۰ *(سراسری ۹۲)*

۵۱- تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x+y+z=12$ با شرط $z\ge 1$، $y\ge 1$ و $1\le x\le 6$، کدام است؟

۱) ۴۵ ۲) ۵۰ ۳) ۵۵ ۴) ۶۰

۵۲- تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=15$ با شرایط $2\le x_1\le 5$، $3\le x_2\le 6$ و $4\le x_3\le 7$، کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۳۲

۵۳- به چند طریق می‌توان ۹ توپ یکسان را در ۴ سبد متمایز جای داد، به طوری که در هر سبد حداقل یک توپ و حداکثر ۴ توپ جای گیرد؟

۱) ۳۵ ۲) ۳۶ ۳) ۴۰ ۴) ۵۶ *(خارج ۹۲)*

۵۴- تعداد اعداد ۳ رقمی که مجموع ارقام آن‌ها برابر با ۱۵ باشد چه‌قدر است؟

۱) ۶۹ ۲) ۱۲۵ ۳) ۷۳ ۴) ۹۰

تابع حسابی اویلر

تعداد اعداد طبیعی کم‌تر یا مساوی N که نسبت به آن اول باشند برابر است با:

$$\phi(N)=N(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots$$

این p_1 و p_2 و... عامل‌های اول N هستند؛ پس مثلاً تعداد اعداد طبیعی کم‌تر از ۲۰ که نسبت به ۲۰ اول باشند برابر است با:

$$20=2^2\times 5^1$$

$$\phi(20)=20(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5})=20\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=8$$

خیلی به کم‌تر و کم‌تر یا مساوی دقت نکنید، چون n نسبت به n اول نیست، به‌جز برای $n=1$ شرط کم‌تر با کم‌تر یا مساوی فرق ندارد.

تست: چند عدد طبیعی نابیشتر از ۹۱ نسبت به آن اول نیستند؟

۱) ۷۲ ۲) ۱۹ ۳) ۷۱ ۴) ۲۰

پاسخ: $\phi(91)$ تعداد اعداد طبیعی کم‌تر یا مساوی ۹۱ را می‌شمرد که نسبت به آن اول هستند.

$$91=13\times 7$$

$$\phi(91)=91(1-\frac{1}{13})(1-\frac{1}{7})=91(\frac{12}{13})(\frac{6}{7})=12\times 6=72$$

پس $91-72=19$ عدد دیگر نسبت به آن اول نیستند.

چندتا از خواص ϕ را هم یاد می‌گیریم:

۱) $\phi(p)=(p-1)$ یعنی مقدار ϕ برای هر عدد اول، یکی از خودش کم‌تر است؛ پس مثلاً $\phi(7)=6$ و $\phi(23)=22$.

۲) به‌جز $\phi(2)$ همیشه حاصل $\phi(n)$ زوج است.

۳) اگر $(a,b)=1$ باشد، یعنی a و b نسبت به هم اول باشند، $\phi(ab)=\phi(a)\phi(b)$.

۴) اگر a و b نسبت به هم اول نباشند، داریم:

$$d=(a,b)\ \Rightarrow\ \phi(ab)=\frac{d\phi(a)\phi(b)}{\phi(d)}$$

تست: m و n **دو عدد دورقمی اول متمایز هستند. حاصل** $\phi(7mn)$ **کدام است؟**

۱) $7mn-1$ ۲) $7(m-1)(n-1)$ ۳) $6(m-1)(n-1)$ ۴) $6(mn-1)$

پاسخ: چون m و n اعداد اول دورقمی متمایزند، نسبت به هم و نسبت به ۷ اول‌اند؛ پس داریم: $\phi(7mn)=\phi(7)\phi(m)\phi(n)=6(m-1)(n-1)$

تست: اگر $(a,b)=6$**، حاصل** $\phi(ab)$ **چند برابر** $\phi(a)\phi(b)$ **است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: داشتیم که:

$$\phi(ab)=\frac{d\phi(a)\phi(b)}{\phi(d)}\xrightarrow{d=6}\phi(ab)=\frac{6\phi(a)\phi(b)}{\phi(6)}\xrightarrow{\phi(6)=6(\frac{1}{2})(\frac{2}{3})=2}\phi(ab)=\frac{6\phi(a)\phi(b)}{2}=3\phi(a)\phi(b)$$

پس ۳ برابرش است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۵۵- چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۲۷۳ که نسبت به ۲۷۳ اول باشند وجود دارد؟ *(خارج ۸۶)*

۱) ۱۴۴ ۲) ۱۴۸ ۳) ۱۵۲ ۴) ۱۶۴

۵۶- تعداد اعداد مثبت کوچک‌تر از ۲۳۱ و غیراول با آن کدام است؟

۱) ۱۱۴ ۲) ۱۱۰ ۳) ۱۰۷ ۴) ۱۰۳

۵۷- تعداد اعداد طبیعی دورقمی که نسبت به ۱۰۵ اول باشند کدام است؟ *(سراسری ۹۰)*

۱) ۳۹ ۲) ۴۰ ۳) ۴۱ ۴) ۴۲

۵۸- کدام‌یک از عبارات زیر می‌تواند نادرست باشد؟

۱) $\phi(2^k)=2^{k-1}$ ۲) $\phi(p)=p-1$ (p عدد اول است.)

۳) $\phi(mn)=\phi(m)\cdot\phi(n)$ ۴) $\phi(12)=\phi(3)\cdot\phi(4)$

۵۹- اگر n **یک عدد طبیعی باشد، کدام گزینه نمی‌تواند معرف** $\phi(n)$ **باشد؟** $(k\in\mathbb{Z})$

۱) 2^k ۲) $k(k+1)$ ۳) $(2k+1)^2-2$ ۴) ۱

۶۰- چند عدد صحیح و مثبت کوچک‌تر از ۳۰۱ وجود دارد که نسبت به ۷۵ و ۶۰ اول باشد؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۴۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۸۰

۶۱- چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۲۴۰۰ وجود دارد که نسبت به ۲۴۰ اول باشد؟

۱) ۳۲۰ ۲) ۶۴۰ ۳) ۱۲۸۰ ۴) ۱۷۶۰

۶۲- در مجموعه‌ی اعداد $\{31,32,33,\ldots,180\}$ **چند عدد وجود دارد که نسبت به ۳۰ اول باشند؟**

۱) ۴۰ ۲) ۵۰ ۳) ۵۲ ۴) ۵۸

۶۳- چند عدد طبیعی a **کوچک‌تر از ۲۳۱، با شرط** $[231,a]=231a$ **وجود دارد؟** *(خارج ۹۱)*

۱) ۱۱۶ ۲) ۱۱۸ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۲۴

۶۴- اگر اعداد صحیح m **و** n **وجود داشته باشند، به طوری که** $105n+am=1$ **و** $a<105$**، چند عدد طبیعی برای** a **می‌توان یافت؟**

۱) ۴۵ ۲) ۴۷ ۳) ۵۲ ۴) ۴۸

۶۵- چند عدد طبیعی برای b **در مجموعه** $\{1,2,\ldots,100\}$ **وجود دارد که معادله‌ی** $24x+b^2y=4$ **جواب‌های صحیح داشته باشد؟**

۱) ۵۰ ۲) ۵۸ ۳) ۴۲ ۴) ۴۰

۶۶- اگر $(n,6)=1$**، آن‌گاه چند عدد طبیعی وجود دارد که** $\phi(2n)=\phi(3n)$**؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیش از ۲

تابع‌شماری و...

تابع، رابطه‌ای است که زوج‌های مرتب آن، مؤلفه‌ی اول تکراری ندارند. قرار می‌گذاریم که حتماً باید از تمام عضوهای مجموعه‌ی اول استفاده بشود؛ یعنی یک تابع از A در B، زیرمجموعه‌ی $A\times B$ است و دقیقاً به تعداد اعضای A، عضو دارد:

$A=\{a_۱,a_۲,a_۳,\dots,a_m\}$ $\qquad$ $B=\{b_۱,b_۲,\dots,b_n\}$ $\qquad$ $f:A\to B$ $\qquad$ $f=\{(a_۱,\dots),(a_۲,\dots),(a_۳,\dots),\dots,(a_m,\dots)\}$

مؤلفه‌ی دوم این زوج‌های مرتب باید از بین اعضای B انتخاب شود، پس هر کدام از ...ها، دارای n حالت هستند؛ بنابراین از A به B، به تعداد $\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{m\ \text{تا}}$ یعنی n^m تابع داریم. به بیان بهتر تعداد توابع از A به B، برابر است با $|B|^{|A|}$.

اگر تابع یک‌به‌یک بخواهیم باید $|A|\le|B|$ باشد و در این صورت تعداد توابع یک‌به‌یک برابر است با $P(|B|,|A|)$. یادتان هست که $P(n,r)$ جایگشت r تایی از n شیء بود و البته می‌دانیدکه P همان اصل ضرب است. $P(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$

اگر تابع پوشا بخواهیم، باید تعریف تابع پوشا را یادآوری کنیم!

$f:A\to B$ زمانی پوشا است که برد f، شامل کل B باشد، یعنی تمام اعضای B به عنوان مؤلفه‌ی دوم استفاده شده باشند؛ پس مثلاً اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۱,۲,۳\}$ باشد، تابع $f_۱=\{(۱,۱),(۲,۳),(۳,۱),(۴,۳)\}$ پوشا نیست چون عدد ۲ در برد آن قرار ندارد اما تابع $f_۲=\{(۱,۲),(۲,۱),(۴,۳),(۳,۱)\}$ پوشاست چون بردش کل B است.

برای شمردن توابع پوشا از اصل شمول و عدم شمول استفاده می‌شود، یعنی تعداد کل را منهای تعداد توابع غیرپوشا می‌کنند. جواب این می‌شود:

$$\text{تعداد توابع پوشا}=\sum_{k=۰}^{n-۱}(-۱)^k\binom{n}{k}(n-k)^m \qquad |B|=n \qquad |A|=m$$

تست: از مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ به مجموعه‌ی $\{۶,۷,۸\}$ چند تابع داریم که $f(۱)=۶$ و $f(۲)\neq ۷$ باشد؟

۱) ۸۱ $\qquad$ ۲) ۲۷ $\qquad$ ۳) ۵۴ $\qquad$ ۴) ۱۶۲

پاسخ: باید تابع به شکل $f=\{(۱,۶),(۲,◌),(۳,\dots),(۴,\dots),(۵,\dots)\}$ باشد. به جای ...ها می‌توانیم ۶ یا ۷ یا ۸ قرار دهیم (۳×۳×۳ حالت) و به جای ◌ باید ۷ نباشد؛ پس فقط ۶ یا ۸ قرار می‌گیرد (۲ حالت) و در نتیجه طبق اصل ضرب ۵۴ = ۲۷×۲ تابع داریم.

تست: از مجموعه‌ی ۴ عضوی به مجموعه‌ی ۶ عضوی، چند تابع وارون‌پذیر داریم؟

۱) ۲۴ $\qquad$ ۲) ۱۵ $\qquad$ ۳) ۳۶۰ $\qquad$ ۴) ۷۲۰

پاسخ: از پیش‌دبستانی می‌دانید که «تابع وارون‌پذیر» یعنی «تابع یک‌به‌یک»، پس تابع یک‌به‌یک می‌خواهیم.

با استفاده از فرمول داریم: $|B|=۶\,,\,|A|=۴$

$$P(|B|,|A|)=P(۶,۴)=\frac{۶!}{(۶-۴)!}=\frac{۶!}{۲!}=۳۶۰$$

حل با اصل ضرب، خیلی هم بهتر است:

$$f=\{(۱,\underbrace{\dots}_{۶\text{حالت}})(۲,\underbrace{\dots}_{۵\text{حالت}})(۳,\underbrace{\dots}_{۴\text{حالت}})(۴,\underbrace{\dots}_{۳\text{حالت}})\} \quad ۶\times۵\times۴\times۳=۳۰\times۱۲=۳۶۰$$

تست: از $\{۱,۲,۳,۴\}$ به $\{۵,۶,۷\}$ چند تابع پوشا داریم؟

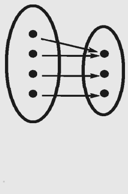
۱) ۱۲ $\qquad$ ۲) ۲۴ $\qquad$ ۳) ۳۶ $\qquad$ ۴) ۸۱

پاسخ: اول استفاده از فرمول را می‌بینیم:

$$\sum_{k=۰}^{n-۱}(-۱)^k\binom{n}{k}(n-k)^m \xrightarrow[m=۴]{n=۳} \sum_{k=۰}^{۲}(-۱)^k\binom{۳}{k}(۳-k)^۴$$

$$=\underbrace{(-۱)^۰\binom{۳}{۰}(۳-۰)^۴}_{k=۰}+\underbrace{(-۱)^۱\binom{۳}{۱}(۳-۱)^۴}_{k=۱}+\underbrace{(-۱)^۲\binom{۳}{۲}(۳-۲)^۴}_{k=۲}=۱\times۱\times۸۱-۳\times۱۶+۳=۸۱-۴۸+۳=۳۶$$

حالا یک راه خاص هم ببینیم: وقتی تعداد عضوهای دامنه یکی بیشتر از برد باشد، تابع پوشا حتماً این‌شکلی است:



یعنی دوتا از عضوهای دامنه، هم‌مقصد هستند. خب دوتا از ۴ عضو باید برداریم $\binom{۴}{۲}$ و سپس این‌ها را به برد متناظر کنیم که $۳!$ حالت دارد؛ پس $۳۶=۳!\times\binom{۴}{۲}$ حالت داریم.

اگر روی این فرمول تمرین کردید، اعداد زیر باید به دست بیایید:

تعداد اعضای برد

تعداد اعضای دامنه: m \ n	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۱					
۲	۱	۲	۰			
۳	۱	۶	۶			
۴	۱	۱۴	۳۶	۲۴		
۵	۱	۳۰	۱۵۰	۲۴۰	۱۲۰	
۶	۱	۶۲	۵۴۰	۱۵۶۰	۱۸۰۰	۷۲۰

فقط وقتی $|A|=|B|$ باشد، از A در B تابعی داریم که هم یک‌به‌یک و هم پوشا می‌شود.

یک‌به‌یک و پوشا بودن معادل هم هستند $\Leftarrow$ $|A|=|B|$

این توابع را متناظر یک‌به‌یک یا تابع دوسویی می‌نامند و تعداد آن‌ها برابر با $n!$ است.

تست: روی مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,۴\}$ چند تابع یک‌به‌یک و پوشا داریم؟

۱) ۲۵۶ ۲) ۱۶ ۳) ۲۴ ۴) ۴

پاسخ: $n=m=۴ \Rightarrow ۴!=۲۴$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۶۷- چند تابع از مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ به مجموعه‌ی $B=\{۵,۶,۷\}$ می‌توان نوشت؟

۱) ۸۱ ۲) ۶۴ ۳) ۲۷ ۴) ۲۵۶

۶۸- چند تابع از مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ به مجموعه‌ی $B=\{a,b,c,d,e\}$ می‌توان نوشت که شامل $(۱,a)$ و $(۳,d)$ بوده و شامل $(۴,b)$ نباشد؟

۱) ۵ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۳۰

۶۹- چند تابع یک‌به‌یک از مجموعه‌ی $A=\{a,b,c\}$ به $B=\{۱,۲,۳\}$ می‌توان نوشت؟

۱) صفر ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۷۰- چند تابع غیر یک‌به‌یک از مجموعه‌ی ۳ عضوی A روی خودش می‌توان نوشت؟

۱) صفر ۲) ۶ ۳) ۲۱ ۴) ۲۷

۷۱- چند تابع یک‌به‌یک از مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ به مجموعه‌ی $B=\{a,b,c,d,e\}$ می‌توان نوشت؟

۱) ۲۴ ۲) ۶۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۴۰

۷۲- چند تابع یک‌به‌یک از مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ به مجموعه‌ی $B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ وجود دارد که شامل عضو $(۱,۱)$ باشد؟

۱) صفر ۲) ۲۴ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰

۷۳- چند تابع پوشا از مجموعه‌ی $A=\{a,b,c\}$ به مجموعه‌ی $B=\{۱,۲,۳\}$ وجود دارد؟

۱) ۹ ۲) ۲۷ ۳) ۶ ۴) صفر

۷۴- چند تابع پوشا از مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ به $B=\{۱,۲\}$ وجود دارد؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۳ ۳) ۳۱ ۴) ۳۰

۷۵- چند تابع غیرپوشا از مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳\}$ به مجموعه‌ی $B=\{a,b\}$ می‌توان نوشت؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۳

۷۶- چند تابع پوشا از مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ به مجموعه‌ی $B=\{۱,۲,۳\}$ می‌توان نوشت؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۷۲

۷۷- چند تابع پوشا از $A=\{a,b,c,d\}$ به $B=\{۱,۲,۳,۴\}$ می‌توان نوشت، به طوری که $f(a)=۳$ باشد؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

۷۸- چند تابع اکیداً صعودی از مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳\}$ به مجموعه‌ی $B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ می‌توان نوشت؟

۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۳۰ ۴) ۶۰

آزمون جامع

۱- معادله‌ی $(x+y)(u+v+t)=7$ چند دسته جواب در مجموعه‌ی اعداد صحیح و نامنفی دارد؟

۱) ۷۲ ۲) ۳۶ ۳) ۶۰ ۴) ۹۶

۲- چند تابع یک‌به‌یک از $A=\{1,2,3,4\}$ به خودش می‌توان نوشت که فقط یک عضو را ثابت نگه دارد؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۳- تعداد جواب‌های طبیعی معادله‌ی $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}=9$ با شرط $x_2>13$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۱۰

۴- اگر x ، y و z اعداد صحیح و غیرمنفی باشند، نامعادله‌ی $x+y+z\le 6$ دارای چند جواب است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۱۰ ۳) ۹۶ ۴) ۸۴

۵- به چند طریق می‌توان ۱۰شاخه گل مختلف از بین گل‌های مریم، کوکب و میخک اختیار کرد هرگاه حداقل ۲ گل مریم داشته باشیم؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۶۰ ۴) ۴۵

۶- تعداد اعداد طبیعی و دورقمی که نسبت به ۱۲۰اول‌اند، کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۳ ۳) ۳۲ ۴) ۳۳

۷- اگر تعداد اعداد مثبت و کوچک‌تر از $a\times b$ که نسبت به $a\times b$ اول‌اند برابر k باشد و a ، b و c اعداد اول غیرمساوی باشند، تعداد اعداد مثبت کوچک‌تر از $a\times b\times c$ که نسبت به آن اول‌اند، کدام است؟

۱) $\frac{k(c-1)}{c}$ ۲) k ۳) $c\times k$ ۴) $k(c-1)$

۸- چند عدد چهاررقمی در مبنای ۴ می‌توان ساخت به طوری‌که هر یک از رقم‌های زوج حداقل یک‌بار در آن ظاهر شوند؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۸۳ ۴) ۷۳

۹- در یک نظرخواهی از ۱۰۰ دانش‌آموز، ۵۱ نفر مجله‌ی A را می‌خوانند، ۴۹ نفر مجله‌ی B را می‌خوانند و ۵۰ نفر مجله‌ی C را می‌خوانند. اگر ۲۸ نفر مجله‌ی C و B، ۲۰ نفر مجله‌ی A و C، ۱۹ نفر مجله‌ی A و B را بخوانند و ۱۰ نفر هر سه مجله را بخوانند، چند نفر، هیچ مجله‌ای نمی‌خوانند؟

۱) صفر ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۰- معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=20$ چند جواب در مجموعه‌ی اعداد طبیعی با شرایط $i+2\ge x_i\ge i$ دارد؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

پاسخ تشریحی اصل شمول و عدم شمول

۱- گزینه‌ی ۱ طبق اصل شمول و عدم شمول داریم:

|شیمی یا فیزیک| = |فیزیک| + |شیمی| − |هر دو|

۱۷ = ۱۱ + ۱۳ − |هر دو| ⇒ |هر دو| = ۷

۲- گزینه‌ی ۴ طبق اصل عدم شمول، تعداد اعضایی که نه به A و نه به B تعلق دارند برابر است با:

$$|\bar{A}\cap\bar{B}|=|S|-|A\cup B|=|S|-(|A|+|B|-|A\cap B|)$$

پس داریم: تعداد افرادی که در هیچ‌یک از دو کلاس نیستند

= کل − (|ادبیات| + |عربی| − |هر دو|)

$$=۵۱-(۳۵+۳۱-۲۳)=۵۱-۴۳=۸$$

۳- گزینه‌ی ۳ طبق اصل شمول برای سه مجموعه داریم:

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|$$
$$-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$
$$\Rightarrow \cancel{۷}=\cancel{۴}+\cancel{۳}+۵\cancel{-۱}-۳-|B\cap C|\cancel{+۱}\Rightarrow |B\cap C|=۲$$

۴- گزینه‌ی ۲ تعداد اعضای باشگاه، تعداد افرادی است که در حداقل یک ورزش فعالیت دارند. طبق اصل شمول:

$$|F\cup V\cup B|=|F|+|V|+|B|-|F\cap B|-|F\cap V|-|V\cap B|$$
$$+|F\cap V\cap B|=۲۹+۳۳+۲۴-۸-۶-۴+۲=۸۶-۱۸+۲=۷۰$$

۵- گزینه‌ی ۱ تعداد افرادی که هیچ مجله‌ای را نمی‌خوانند، طبق اصل عدم شمول برابر است با:

$$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}|=|S|-|A\cup B\cup C|$$
$$=|S|-(|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|$$
$$+|A\cap B\cap C|)=۱۰۰-(۶۰+۵۰+۵۰-۲۰-۲۰-۳۰+۱۰)$$
$$=۱۰۰-(۱۶۰-۷۰+۱۰)=۰$$

۶- گزینه‌ی ۳ طبق اصل شمول تعداد اعدادی که بر ۳ یا ۷ بخش‌پذیرند برابر است با: $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

= |مضرب ۳| + |مضرب ۷| − $\underbrace{|\text{مضرب ۳ و ۷}|}_{\text{مضرب ۲۱}}$ = $[\frac{۱۹۹}{۳}]+[\frac{۱۹۹}{۷}]-[\frac{۱۹۹}{۲۱}]$

$$=۶۶+۲۸-۹=۸۵$$

تعداد اعداد طبیعی کم‌تر یا مساوی N (یعنی از ۱ تا N) که بر k بخش‌پذیرند برابر است با $[\frac{N}{k}]$.

۷- گزینه‌ی ۳ طبق اصل عدم شمول:

|نه بر ۵ و نه بر ۶| = |کل| − |بر ۶ یا ۵|

= |S| − (|مضرب ۶| + |مضرب ۵| − |مضرب ۵ و ۶|)

تعداد کل اعداد سه‌رقمی ۹۰۰ تا است. هم‌چنین تعداد اعداد سه‌رقمی که مضرب k باشند برابر $[\frac{۹۹۹}{k}]-[\frac{۹۹}{k}]$ است.

$$=۹۰۰-([\frac{۹۹۹}{۶}]-[\frac{۹۹}{۶}]+[\frac{۹۹۹}{۵}]-[\frac{۹۹}{۵}]-([\frac{۹۹۹}{۳۰}]-[\frac{۹۹}{۳۰}]))$$
$$=۹۰۰-(۱۶۶-۱۶+۱۹۹-۱۹-(۳۳-۳))=۹۰۰-(۱۵۰+۱۸۰-۳۰)$$
$$=۹۰۰-۳۰۰=۶۰۰$$

۸- گزینه‌ی ۲ |نه بر ۱۱ و نه بر ۷| = کل − |بر ۱۱ یا بر ۷|

= کل − (|مضرب ۷| + |مضرب ۱۱| − |مضرب ۷ و ۱۱|)

$$=۳۴۹-([\frac{۴۹۹}{۷}]-[\frac{۱۵۰}{۷}]+[\frac{۴۹۹}{۱۱}]-[\frac{۱۵۰}{۱۱}]-([\frac{۴۹۹}{۷۷}]-[\frac{۱۵۰}{۷۷}]))$$
$$=۳۴۹-(۷۱-۲۱+۴۵-۱۳-(۶-۱))=۳۴۹-(۵۰+۳۲-۵)$$
$$=۳۴۹-۷۷=۲۷۲$$

تعداد اعداد بین ۱۵۰ و ۵۰۰ که بر k بخش‌پذیرند برابر است با $[\frac{۴۹۹}{k}]-[\frac{۱۵۰}{k}]$ و تعداد کل این اعداد ۳۴۹ = ۱۵۰ − ۴۹۹ است.

۹- گزینه‌ی ۴ طبق اصل عدم شمول:

تعداد اعدادی که مضرب ۲، ۳ و ۵ نیستند = |کل| − |مضرب ۲ یا ۳ یا ۵|

= ۱۰۰ − (|مضرب ۲| + |مضرب ۳| + |مضرب ۵| − |مضرب ۲ و ۳|

− |مضرب ۲ و ۵| − |مضرب ۳ و ۵| + |مضرب ۲، ۳ و ۵|)

$$=۱۰۰-([\frac{۱۰۰}{۲}]+[\frac{۱۰۰}{۳}]+[\frac{۱۰۰}{۵}]-[\frac{۱۰۰}{۶}]-[\frac{۱۰۰}{۱۰}]-[\frac{۱۰۰}{۱۵}]+[\frac{۱۰۰}{۳۰}])$$
$$=۱۰۰-(۵۰+۳۳+۲۰-۱۶-۱۰-۶+۳)=۱۰۰-۷۴=۲۶$$

۱۰- گزینه‌ی ۱ اول برای محاسبه‌ی تعداد مضارب ۳ یا ۴ از اصل شمول داریم:

|مضرب ۳| + |مضرب ۴| − |مضرب ۳ و ۴| = $[\frac{۲۰۰۱}{۳}]+[\frac{۲۰۰۱}{۴}]-[\frac{۲۰۰۱}{۱۲}]$

$$=۶۶۷+۵۰۰-۱۶۶=۱۰۰۱$$

مضارب ۳ یا ۴ که مضرب ۵ هستند را هم می‌شماریم:

|مضرب ۳ و ۵| + |مضرب ۴ و ۵| − |مضرب ۳، ۴ و ۵|

= |مضرب ۱۵| + |مضرب ۲۰| − |مضرب ۶۰|

$$=[\frac{۲۰۰۱}{۱۵}]+[\frac{۲۰۰۱}{۲۰}]-[\frac{۲۰۰۱}{۶۰}]=۱۳۳+۱۰۰-۳۳=۲۰۰$$

پس داریم: $۱۰۰۱-۲۰۰=۸۰۱$

۱۱- گزینه‌ی ۱ طبق اصل عدم شمول:

تعداد اعدادی که ۲ و ۴ دارند

= تعداد کل اعداد − تعداد اعدادی که ۲ یا ۴ ندارند

= |کل| − (|۲ ندارند| + |۴ ندارند| − |۲ و ۴ ندارند|)

$$(\underset{۱,۲,۳,۴}{\underline{۴}\times\underline{۴}\times\underline{۴}\times\underline{۴}})-((\underset{۱,۳,۴}{\underline{۳}\times\underline{۳}\times\underline{۳}\times\underline{۳}})+(\underset{۱,۲,۳}{\underline{۳}\times\underline{۳}\times\underline{۳}\times\underline{۳}})$$
$$-(\underset{۱,۳}{\underline{۲}\times\underline{۲}\times\underline{۲}\times\underline{۲}}))=۴^۴-(۳^۴+۳^۴-۲^۴)$$
$$=۲۵۶-(۸۱+۸۱-۱۶)=۱۱۰$$

مکمل «۲ و ۴ دارند» می‌شود «۲ یا ۴ ندارند» علت تبدیل «و» به «یا» چی بود؟ خب قانون دمرگان!

۱۲- گزینه‌ی ۲

|۳ یا ۶ ظاهر نشوند| − |کل| = |۳ و ۶ ظاهر شوند|

(|۳ یا ۶ ندارند| − |۶ ندارند| + |۳ ندارند|) − |کل سه‌رقمی| =

$= (\frac{۹}{}\times\frac{۱۰}{}\times\frac{۱۰}{}) - ((\frac{۸}{}\times\frac{۹}{}\times\frac{۹}{}) + (\frac{۸}{}\times\frac{۹}{}\times\frac{۹}{}) - (\frac{۷}{}\times\frac{۸}{}\times\frac{۸}{}))$

$= ۹۰۰ - (۶۴۸ + ۶۴۸ - ۴۴۸) = ۹۰۰ - ۸۴۸ = ۵۲$

این اعداد، سه‌رقمی‌اند و ۳ و ۶ دارند؛ پس یک رقم دیگر لازم است:

الف ۰، ۶ و ۳: $\frac{۱}{}\times\frac{۲}{}\times\frac{۲}{} = ۴$

ب ۳، ۶ و ۳ یا ۶، ۶ و ۳: $۲\times\frac{۳!}{۲!} = ۳\times۲ = ۶$

ج ۶، ۳ و یکی از اعداد ۱، ۲، ۴، ۵، ۷، ۸ و ۹: $\binom{۷}{۱}\times۳! = ۴۲$

پس روی هم ۴ + ۶ + ۴۲ یعنی ۵۲ تا عدد داریم.

۱۳- گزینه‌ی ۲ این اعداد ۲، ۳ و ۴ را دارند؛ پس یک رقم دیگر لازم است:

الف ۲، ۳، ۴ و ۰: $\frac{۱}{}\times\frac{۲}{}\times\frac{۳}{}\times\frac{۳}{} = ۱۸$

ب ۲، ۳، ۴ و ۱: $۴! = ۲۴$

ج ۲، ۳ و ۴ و یکی دیگر از بین خود آن‌ها: $\binom{۳}{۱}\frac{۴!}{۲!} = ۳۶$

پس روی هم ۷۸ عدد داریم.

اصل عدم شمول را به کار ببریم:

|۲ یا ۳ یا ۴ ندارند| − |کل| = |۲، ۳ و ۴ را دارند|

|۳ و ۲ ندارند| − |۴ ندارند| + |۳ ندارند| + |۲ ندارند|) − کل =

(|۳، ۴ و ۲ ندارند| + |۴ و ۳ ندارند| − |۴ و ۲ ندارند| −

دقت کنید که تعداد حالات این‌ها با هم برابر است:

|۴ ندارند| = |۳ ندارند| = |۲ ندارند|

|۴ و ۳ ندارند| = |۴ و ۲ ندارند| = |۳ و ۲ ندارند|

پس داریم:

$(\underset{۰,۱,۲,۳,۴}{\frac{۴}{}\times\frac{۵}{}\times\frac{۵}{}\times\frac{۵}{}}) - ((\underset{۰,۱,۳,۴}{\frac{۳}{}\times\frac{۴}{}\times\frac{۴}{}\times\frac{۴}{}})\times۳ - (\underset{۰,۱,۴}{\frac{۲}{}\times\frac{۳}{}\times\frac{۳}{}\times\frac{۳}{}})\times۳$

$+(\underset{۰,۱}{\frac{۱}{}\times\frac{۲}{}\times\frac{۲}{}\times\frac{۲}{}})) = ۵۰۰ - (۱۹۲\times۳ - ۵۴\times۳ + ۸) = ۷۸$

راه اول خیلی بهتر بود!

۱۴- گزینه‌ی ۲

|حداقل دو حرف یکسان کنار هم هستند| − |کل| = |هیچ دو حرف یکسانی کنار هم نیستند|

= |کل| − |b,b کنار هم هستند ∪ a,a کنار هم هستند|

= |کل| − (|a,a کنار هم| + |b,b کنار هم|

− |b,b کنار هم و a,a کنار هم|) $= \frac{۵!}{۲!۲!} - (\frac{۴!}{۲!} + \frac{۴!}{۲!} - ۳!)$

aabbc : $\frac{۵!}{۲!۲!}$ $\boxed{aa}$bbc : $\frac{۴!}{۲!}$ $\boxed{aa}\,\boxed{bb}$c : ۳!

$= ۳۰ - (۱۲ + ۱۲ - ۶) = ۱۲$

۱۵- گزینه‌ی ۱ هیچ دو حرف یکسانی کنار هم نیستند

= |کل| − |حداقل دو حرف یکسان کنار هم هستند|

= |کل| − (|aa کنار هم| + |bb کنار هم| + |cc کنار هم|

− |aa و bb کنار هم| − |aa و cc کنار هم| − |bb و cc کنار هم|

+ |aa, bb و cc کنار هم|)

خوشبختانه تعداد این‌ها برابر است.

= |کل| − (|aa کنار هم| × ۳ − |aa و bb کنار هم| × ۳ + |aa, bb و cc کنار هم|)

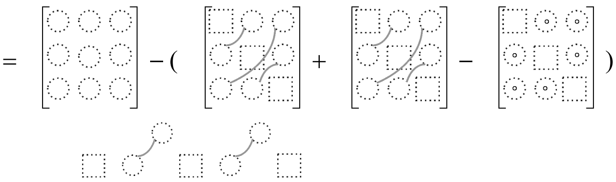
aabbcc $\boxed{aa}$bbcc $\boxed{aa}\,\boxed{bb}$cc $\boxed{aa}\,\boxed{bb}\,\boxed{cc}$

$= \frac{۶!}{۲!۲!۲!} - (\frac{۵!}{۲!۲!}\times۳ - \frac{۴!}{۲!}\times۳ + ۳!) = ۹۰ - (۳۰\times۳ - ۱۲\times۳ + ۶) = ۳۰$

۱۶- گزینه‌ی ۱ طبق اصل عدم شمول:

|متقارن یا پادمتقارن| − |کل| = |نه پادمتقارن و نه متقارن|

= |کل| − (|متقارن| + |پادمتقارن| − |متقارن و پادمتقارن|)



$= ۲^۹ - (۲^۳\times۲^۳ + ۲^۳\times۳^۳ - ۲^۳) = ۵۱۲ - (۶۴ + ۲۱۶ - ۸) = ۲۴۰$

در مورد ماتریس‌ها و شمارش تعداد روابط، به بخش رابطه مراجعه کنید!

۱۷- گزینه‌ی ۱ هر کبوتر ۳ لانه را می‌تواند انتخاب کند. پس در کل $۲۴۳ = ۳^۵ = ۳\times۳\times۳\times۳\times۳$ حالت داریم. حالا طبق اصل عدم شمول:

|حداقل یک لانه خالی باشد| − |کل| = |در هر لانه حداقل یک کبوتر|

$= |S| - |A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳|$

A_i حالت‌هایی است که لانه‌ی i خالی باشد.

$= ۳^۵ - (|A_۱| + |A_۲| + |A_۳| - |A_۱\cap A_۲| - |A_۱\cap A_۳|$

$- |A_۲\cap A_۳| + |A_۱\cap A_۲\cap A_۳|)$

حالا دقت کنید: $|A_۱|$ = تعداد حالاتی که لانه‌ی ۱ خالی است

$= \underset{\text{کبوترها در لانه‌ی ۲ و ۳ قرار می‌گیرند}}{۲\times۲\times۲\times۲\times۲} = ۲^۵$

$|A_۱\cap A_۲|$ = تعداد حالاتی که لانه‌های ۱ و ۲ خالی هستند

$= \underset{\text{کبوترها در لانه‌ی ۳ قرار دارند}}{۱\times۱\times۱\times۱\times۱} = ۱$

و واضح است که $|A_۱\cap A_۲\cap A_۳| = ۰$، پس داریم:

$۳^۵ - (۳\times۲^۵ - ۳\times۱ + ۰) = ۲۴۳ - (۹۶ - ۳) = ۱۵۰$

۱۸- گزینه‌ی ۲ اول آن یک نامه را انتخاب می‌کنیم:

$\binom{۴}{۱} = ۴$

حالا سه نامه و سه پاکت دیگر داریم که همگی باید نادرست باشند. یعنی هیچ‌یک در پاکت درست خود نباشند.

با استفاده از اصل شمول و عدم شمول می‌توان نشان داد تعداد حالات برای قرارگرفتن n نامه در پاکت‌ها که هیچ نامه‌ای در پاکت درستش نباشد برابر است با: $d_n=(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!})n!$

مثلاً:

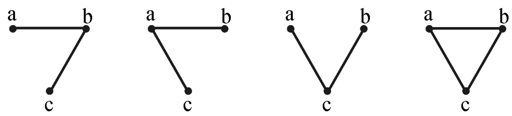
n	۱	۲	۳	۴	۵
d_n	۰	۱	۲	۹	۴۴

پس برای نادرست قراردادن ۳ نامه، ۲ حالت داریم، بنابراین در کل $8=\binom{4}{1}\times d_3$ حالت وجود دارد.

این رابطه‌ی d_n را «غیرآرایش» یا «پریش» می‌نامند!

۱۹- گزینه‌ی ۴ اول دو روستای منفرد را برداریم: $10=\binom{5}{2}$

حالا باید بین سه روستای مشخص دیگر، راه‌هایی احداث کرد که هیچ‌یک از آن‌ها منفرد نمانند. ۴ حالت داریم:



پس تعداد حالت‌ها در کل برابر است با: $40=4\times\binom{5}{2}$

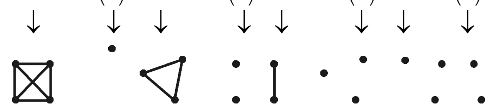
تعداد حالاتی که در بین ۳ روستا، هیچ‌کدام منزوی نمانند را با اصل عدم شمول می‌شماریم.

$$|\text{هیچ یک منزوی نماند}|=|\text{کل}|-|\text{حداقل یکی منزوی بماند}|$$
$$=|S|-|A\cup B\cup C|=|S|-(|A|+|B|+|C|-|A\cap B|$$
$$-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|)$$
$$=2^3-(2^1\times3\quad-2^0\times3\quad+2^0)=8-(6-3+1)=8-4=4$$

پس در کل $40=4\times\binom{5}{2}$ حالت داریم.

۲۰- گزینه‌ی ۲

$$|\text{هیچ روستایی منفرد نماند}|=|\text{کل}|-|\text{حداقل یکی منفرد بماند}|$$
$$=2^6-(\binom{4}{1}2^3-\binom{4}{2}2^1+\binom{4}{3}2^0-\binom{4}{4})$$



$$=64-(4\times8-6\times2+4-1)=64-(32-12+4-1)$$
$$=64-23=41$$

برای شمردن تعداد حالت‌ها در هر مورد، نگاهی به فصل گراف داشته باشید.

هر یال دو حالت دارد و تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $2^{\text{تعداد یال آزاد}}$

۲۱- گزینه‌ی ۳ در واقع برای ۴ جفت شیء، یک پریش می‌خواهیم: $d_4=9$

۲۲- گزینه‌ی ۲ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $=\binom{n+r-1}{r-1}$

$$\xrightarrow[r=4]{n=10}\binom{10+4-1}{4-1}=\binom{13}{3}$$

۲۳- گزینه‌ی ۳

$$\text{تعداد جواب‌های طبیعی}=\binom{n-1}{r-1}\xrightarrow[r=4]{n=15}\binom{15-1}{4-1}=\binom{14}{3}$$

برای یافتن تعداد جواب‌های طبیعی، اول به هر یک از ۴ نفر یک سکه می‌دهیم: $x_1+x_2+x_3+x_4=15$

$$\xrightarrow{\text{نفری یک سکه بدهیم}}y_1+y_2+y_3+y_4=11$$

حالا تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی جدید را حساب می‌کنیم: $\xrightarrow[r=4]{n=11}\binom{11+4-1}{4-1}=\binom{14}{3}$

۲۴- گزینه‌ی ۳ تعداد گل‌ها از انواع ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را x_1، x_2، x_3، x_4 و x_5 می‌گیریم؛ پس داریم:

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=3\xrightarrow[r=5]{n=3}\binom{3+5-1}{5-1}=\binom{7}{4}=35$$

۲۵- گزینه‌ی ۲ هیچ لانه‌ای خالی نماند؛ یعنی جواب طبیعی می‌خواهیم:

$$x_1+x_2+x_3=7\Rightarrow\binom{n-1}{r-1}=\binom{7-1}{3-1}=\binom{6}{2}=15$$

۲۶- گزینه‌ی ۴

$$x_1+x_2+x_3=7\xrightarrow{n=7,r=3}\binom{7+3-1}{3-1}=\binom{9}{2}$$
$$x_1+x_2+\cdots+x_\ell=2\xrightarrow[r=\ell]{n=2}\binom{2+\ell-1}{\ell-1}=\binom{\ell+1}{\ell-1}$$

طبق صورت سؤال این دوتا با هم برابرند: $\binom{9}{2}=\binom{\ell+1}{\ell-1}$

می‌دانیم $\binom{9}{7}=\binom{9}{2}$؛ پس داریم: $\ell-1=7$ و $\ell+1=9\Rightarrow\ell=8$

۲۷- گزینه‌ی ۱ برای تأمین شرط‌ها به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

به خاطر $x_1\ge2$، دوتا سکه به نفر ۱ می‌دهیم.

به خاطر $x_2>3$، می‌نویسیم $x_2\ge4$ و چهارتا سکه به نفر ۲ می‌دهیم.

به خاطر $x_3\ge1$، یک سکه به نفر ۳ می‌دهیم پس داریم:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=17$$
$$\xrightarrow[\substack{x_2\ge4\\x_3\ge1}]{x_1\ge2}y_1+y_2+y_3+y_4=17-2-4-1=10$$
$$\xrightarrow[r=4]{n=10}\binom{10+4-1}{4-1}=\binom{13}{3}=\frac{13\times12\times11}{3\times2}=13\times2\times11=286$$

۲۸- گزینه‌ی ۲ اول نفری دوتا هدیه می‌دهیم:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=15$$
$$\xrightarrow{x_i\ge2}y_1+y_2+y_3+y_4=15-2-2-2-2=15-4\times2=7$$
$$\xrightarrow[r=4]{n=7}\binom{7+4-1}{4-1}=\binom{10}{3}$$

۲۹- گزینه‌ی ۴ یعنی باید $x_1\ge1$، $x_2\ge2$ و $x_3\ge6$ باشد، پس به نفرات ۱، ۲ و ۳ به ترتیب ۱، ۲ و ۶ سیب می‌دهیم. ۹تا سیب مصرف می‌شود و داریم:

$$\begin{cases}n=25\\r=4\end{cases}\xrightarrow{\text{۹تا سیب مصرف شد}}\begin{cases}n=16\\r=4\end{cases}\Rightarrow\binom{16+4-1}{4-1}=\binom{19}{3}$$

۳۰- گزینه‌ی ۲ باید $x_1+x_2+x_3+x_4=8$ باشد اما مقدار x_1 صفر نباشد (رقم سمت چپ صفر نیست)، از مکمل استفاده می‌کنیم:

(تعداد جواب‌هایی که $x_1\neq 0$) = (تعداد کل جواب‌های صحیح و نامنفی) − (تعداد جواب‌هایی که $x_1=0$ یعنی $x_2+x_3+x_4=8$)

$$=\binom{8+4-1}{4-1}-\binom{8+3-1}{3-1}=\binom{11}{3}-\binom{10}{2}=165-45=120$$

$x_1+x_2+x_3+x_4=8$ و باید شرط $x\ge1$ برقرار باشد، پس ابتدا یکی به x_1 می‌دهیم و داریم: $\binom{7+3}{3}=120$

۳۱- گزینه‌ی ۲ اول دقت کنید که این معادله، در ظاهر فعلی‌اش، معادله‌ی خطی با ضرایب واحد نیست، پس باید اول آن را تغییر بدهیم. چون $2x_2$، $2x_3$ و ۲۰ همگی زوج هستند، x_1 هم مجبور است زوج باشد؛ یعنی داریم: $x_1=2k$

$$\xrightarrow{x_1=2k} 2k+2x_2+2x_3=20 \xrightarrow{\div 2} k+x_2+x_3=10$$

$$\xrightarrow[r=3]{n=10}\binom{10+3-1}{3-1}=\binom{12}{2}=66$$

۳۲- گزینه‌ی ۳ $5z^2$ مزاحم است، باید آن را از بین ببریم. مقدار z می‌تواند ۰ یا ۱ یا ۲ باشد (چرا بیشتر از این نمی‌شود؟) پس داریم:

الف) اگر $z=0$ باشد، معادله به صورت $x+y=22$ درمی‌آید که $\binom{22+2-1}{2-1}=23$ جواب دارد.

ب) اگر $z=1$ باشد، معادله به صورت $x+y=17$ درمی‌آید که $\binom{17+2-1}{2-1}=18$ جواب دارد.

ج) اگر $z=2$ باشد، معادله به صورت $x+y=2$ درمی‌آید که $\binom{2+2-1}{2-1}=3$ جواب دارد.

پس روی هم $23+18+3=44$ جواب صحیح و نامنفی داریم.

۳۳- گزینه‌ی ۳ باید x_3 را از بین ببریم. مقادیر ممکن عبارت‌اند از:

دقت کنید که $\frac{10}{x_3}$ باید عدد صحیح شود.

$$x_3=1 \Rightarrow x_1+x_2+1=10 \Rightarrow x_1+x_2=9$$

$$\Rightarrow \binom{9+2-1}{2-1}=\binom{10}{1}=10$$

$$x_3=2 \Rightarrow x_1+x_2+2=\frac{10}{2} \Rightarrow x_1+x_2=3$$

$$\Rightarrow \binom{3+2-1}{2-1}=\binom{4}{1}=4$$

$$x_3=5 \Rightarrow x_1+x_2+5=\frac{10}{5} \Rightarrow x_1+x_2=-3 \quad \times$$

$$x_3=10 \Rightarrow x_1+x_2+10=\frac{10}{10} \Rightarrow x_1+x_2=-9 \quad \times$$

پس ۱۴ تا جواب روی هم داریم.

۳۴- گزینه‌ی ۳ مکعب چه عددی بین ۱۰۰ و ۲۵۰ است؟ ببینید: $4^3=64\,,\,5^3=125\,,\,6^3=216\,,\,7^3=343$

پس داریم: $x_1+x_2+x_3=5$ یا ۶

تعداد جواب‌های طبیعی برابر است با: $\binom{5-1}{3-1}+\binom{6-1}{3-1}$ یعنی:

$$\binom{4}{2}+\binom{5}{2}=16$$

۳۵- گزینه‌ی ۲ $(x_1+x_2)^3$ را باید از بین ببریم. اگر $x_1=x_2=1$ باشد، حاصل $(x_1+x_2)^3$ می‌شود ۸ و داریم:

$$x_3+x_4=12$$

در سایر حالت‌ها هم x_1+x_2 از ۲ بیشتر می‌شود (مثلاً می‌شود ۳ یا ۴ یا ...) که مکعب آن از ۲۰ بیشتر است و طرف راست را منفی می‌کند، پس امکان دیگری نداریم!

$$x_1=x_2=1 \Rightarrow x_3+x_4=12 \xrightarrow[r=2]{n=12}\binom{12-1}{2-1}=11$$

دقت می‌کنید که r، تعداد مجهول‌ها است نه اندیس مجهول آخر!

۳۶- گزینه‌ی ۱ طبق صورت سؤال داریم:

$$3x_1+3x_2+3x_3+3x_4=30 \xrightarrow{\div 3} x_1+x_2+x_3+x_4=10$$

$$\xrightarrow[r=4]{n=10}\binom{10+4-1}{4-1}=\binom{13}{3}$$

۳۷- گزینه‌ی ۱ تعداد جواب‌هایی که $x=y$ باشد برابر است با:

$$x+y+z=10 \xrightarrow{x=y} 2x+z=10$$

$\Rightarrow (x,z)=(0,10)$ یا $(1,8)$ یا $(2,6)$ یا $(3,4)$ یا $(4,2)$ یا $(5,0)$

پس شش جواب داریم که $x=y$ باشد. تعداد کل جواب‌ها هم برابر است با: $\xrightarrow[r=3]{n=10}\binom{10+3-1}{3-1}=\binom{12}{2}=66$

پس $66-6=60$ جواب داریم که $x\neq y$. در نصف این جواب‌ها x بیشتر است و در نصف دیگر y بیشتر است. بنابراین ۳۰ جواب با شرط $x>y$ داریم.

۳۸- گزینه‌ی ۴ با اضافه‌کردن یک مجهول x_4، نامعادله را به تساوی تبدیل می‌کنیم:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=12 \Rightarrow \binom{12+4-1}{4-1}=\binom{15}{3}=\binom{15}{12}$$

۳۹- گزینه‌ی ۲ اول یک مجهول t اضافه می‌کنیم تا نامساوی به تساوی تبدیل شود:

$$x+y+z\le 13 \Rightarrow x+y+z+t=13$$

حالا دقت کنید که جواب طبیعی برای x، y و z می‌خواهیم اما در مورد t حرفی نزدیم پس فقط x، y و z باید بیشتر یا مساوی ۱ باشند: $x+y+z+t=13 \xrightarrow[\substack{y\ge1\\ z\ge1}]{x\ge1} x'+y'+z'+t=13-3=10$

$$\Rightarrow \binom{10+4-1}{4-1}=\binom{13}{3}$$

۴۰- گزینه‌ی ۱ با یک مجهول t، نامساوی تبدیل به تساوی می‌شود:

$$x+y+z\le ۱۵ \Rightarrow x+y+z+t=۱۵$$

$$\xrightarrow[z\ge ۴]{x\ge ۳,\ y\ge ۳} x'+y'+z'+t=۱۵-۳-۳-۴=۵$$

$$\xrightarrow[r=۴]{n=۵}\binom{۵+۴-۱}{۴-۱}=\binom{۸}{۳}$$

۴۱- گزینه‌ی ۱ از مکمل استفاده می‌کنیم. یعنی کل جواب‌های طبیعی را می‌شماریم و منهای جواب‌هایی می‌کنیم که $x_1\ge ۴$ است.

(تعداد جواب‌هایی باشرط $x_1\le ۳$) = (تعداد کل جواب‌ها) − (تعداد جواب‌هایی که $x_1\ge ۴$)

تعداد کل جواب‌های طبیعی برابر است با:

$$\xrightarrow[r=۳]{n=۹}\binom{n-۱}{r-۱}=\binom{۹-۱}{۳-۱}=\binom{۸}{۲}=۲۸$$

تعداد جواب‌های طبیعی که $x_1\ge ۴$ باشد:

$$x_1+x_2+x_3=۹ \xrightarrow[x_2\ge ۱,\ x_3\ge ۱]{x_1\ge ۴} y_1+y_2+y_3=۹-۴-۱-۱=۳$$

$$\Rightarrow \binom{۳+۳-۱}{۳-۱}=۱۰$$

پس ۱۸=۱۰−۲۸ جواب داریم.

۴۲- گزینه‌ی ۴ چون بین دو معادله، مجهول مشترکی نداریم، تعداد جواب‌های هر دو معادله را حساب کرده و در هم ضرب می‌کنیم.

$$\begin{cases} a+b+c=۸ \Rightarrow \binom{n-۱}{r-۱}=\binom{۸-۱}{۳-۱}=\binom{۷}{۲}=۲۱ \\ x+y+z=۱۰ \Rightarrow \binom{n-۱}{r-۱}=\binom{۱۰-۱}{۳-۱}=\binom{۹}{۲}=۳۶ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\times} ۲۱\times ۳۶=۷۵۶$$

۴۳- گزینه‌ی ۲ برای نوشابه‌ها، معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=۶$ را داریم که جواب صحیح و نامنفی می‌خواهد:

$$\binom{۶+۴-۱}{۴-۱}=\binom{۹}{۳}=\frac{۹\times ۸\times ۷}{۳\times ۲}=۸۴$$

برای کیک‌ها، معادله‌ی $y_1+y_2+y_3+y_4=۵$ را داریم که جواب طبیعی می‌خواهد (به هر کس حداقل یک کیک): $\binom{۵-۱}{۴-۱}=\binom{۴}{۳}=۴$

پس در کل ۳۳۶=۴×۸۴ جواب داریم.

۴۴- گزینه‌ی ۲ هر جمله از این بسط به شکل $\frac{۱۰!}{x_1!x_2!x_3!}a^{x_1}b^{x_2}c^{x_3}$ است و جمع توان‌ها، یعنی $x_1+x_2+x_3$ باید ۱۰ باشد. پس داریم:

$$x_1+x_2+x_3=۱۰ \xrightarrow[r=۳]{n=۱۰}\binom{۱۰+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۱۲}{۲}=۶۶$$

۴۵- گزینه‌ی ۲

هر جمله از این بسط $\frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!}x^{\alpha_1}(۳y)^{\alpha_2}(-۲z)^{\alpha_3}$ است. پس داریم:

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=n \Rightarrow \binom{n+۳-۱}{۳-۱}=\binom{n+۲}{۲}=۶۶$$

$$\Rightarrow \frac{(n+۲)(n+۱)}{۲}=۶۶ \Rightarrow (n+۲)(n+۱)=۱۳۲=۱۲\times ۱۱$$

$$\Rightarrow n=۱۰$$

۴۶- گزینه‌ی ۲ گفتیم هر جمله از این بسط دارای عبارت $a^{x_1}b^{x_2}c^{x_3}d^{x_4}$ است و چون می‌خواهیم شامل a باشد باید $x_1\ge ۱$ باشد، پس داریم:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=۷ \xrightarrow{x_1\ge ۱} y_1+x_2+x_3+x_4=۷-۱=۶$$

$$\xrightarrow[r=۴]{n=۶}\binom{۶+۴-۱}{۴-۱}=\binom{۹}{۳}=۸۴$$

۴۷- گزینه‌ی ۲ حداقل ۳ نفر جایزه بگیرند یعنی ۳ یا ۴ یا ۵ نفر جایزه بگیرند؛ یعنی حداکثر دو نفر دست خالی بمانند؛ پس در معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=۹$ حالت‌های زیر را می‌خواهیم:

الف به هر کس حداقل یک جایزه برسد:

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=۹$$

جواب طبیعی: $\binom{۹-۱}{۵-۱}=\binom{۸}{۴}=۷۰$

ب به یک نفر جایزه نرسد و به ۴ نفر دیگر حداقل یکی برسد؛ پس اول یکی از ۵ نفر را برمی‌داریم و برای ۴ نفر دیگر جواب طبیعی می‌آوریم: $\binom{۵}{۱}\times\binom{۹-۱}{۴-۱}=۵\times\binom{۸}{۳}=۲۸۰$

ج به دو نفر جایزه نرسد و به ۳ نفر دیگر حداقل یکی برسد:

$$\binom{۵}{۲}\times\binom{۹-۱}{۳-۱}=۱۰\times\binom{۸}{۲}=۲۸۰$$

پس می‌شود: $۲۸۰+۲۸۰+۷۰=۶۳۰$

۴۸- گزینه‌ی ۱ اول ۳ تا جعبه که خالی باشند را انتخاب می‌کنیم: $\binom{۱۰}{۳}$ سپس ۱۰ توپ را در ۷ جعبه‌ی دیگر باید بگذاریم:

$$x_1+x_2+\cdots+x_7=۱۰ \xrightarrow[\substack{r=۷\\ \text{جواب طبیعی}}]{n=۱۰}\binom{۱۰-۱}{۷-۱}=\binom{۹}{۶}=\binom{۹}{۳}$$

پس داریم: $\binom{۱۰}{۳}\binom{۹}{۳}$ اما چنین چیزی در گزینه‌ها نیست. ماجرا این است که حاصل $\binom{۱۰}{۳}$ می‌شود ۱۲۰ و حاصل !۵ هم ۱۲۰ است. پس $۵!\binom{۹}{۳}$ هم درست است.

۴۹- گزینه‌ی ۱ در معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=۱۲$ جواب طبیعی می‌خواهیم: $\xrightarrow[r=۳]{n=۱۲}\binom{۱۲-۱}{۳-۱}=\binom{۱۱}{۲}=۵۵$

۵۰- گزینه‌ی ۴ در معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=۹$ جواب طبیعی می‌خواهیم: $\binom{n-۱}{r-۱}=\binom{۹-۱}{۵-۱}=\binom{۸}{۴}=۷۰$

۵۱- گزینه‌ی ۱ اول به هر کدام یک سکه بدهیم تا حداقل‌ها تأمین شود:

$$x+y+z=۱۲ \xrightarrow[z\ge ۱]{x\ge ۱,\ y\ge ۱} x'+y'+z'=۱۲-۳=۹$$

حالا x' باید کم‌تر یا مساوی ۵ باشد:

$$۱\le x\le ۶ \Rightarrow ۰\le \underbrace{(x-۱)}_{x'}\le ۵ \Rightarrow x'\le ۵$$

پس داریم: تعداد جواب‌های $x' \le 5$ = کل − تعداد جواب‌های $x' \ge 6$

= (تعداد جواب‌ها با شرط $x' \ge 6$) − (تعداد جواب‌های $x'+y'+z'=9$)

(شش تا سکه به x' می‌دهیم)

$$=\binom{9+3-1}{3-1}-\binom{3+3-1}{3-1}=\binom{11}{2}-\binom{5}{2}=55-10=45$$

۵۲- گزینه‌ی ۱ ابتدا به هر کس، حداقل سکه‌ی موردنظرش را می‌دهیم:

$$x_1+x_2+x_3=15 \xrightarrow[\substack{3\le x_2\\ 4\le x_3}]{2\le x_1} y_1+y_2+y_3=15-2-3-4=6$$

حالا از حداکثر تعداد سکه‌ها هم کم می‌شود؛ یعنی شرط‌ها عبارت‌اند از:

$2\le x_1\le 5 \Rightarrow 0\le y_1\le 3$

$3\le x_2\le 6 \Rightarrow 0\le y_2\le 3$

$4\le x_3\le 7 \Rightarrow 0\le y_3\le 3$

اگر خلاصه‌تر بنویسیم: $0\le y_i\le 3$

تعداد جواب‌های موردنظر برابر است با:

|جواب‌هایی که $y_1,y_2,y_3\le 3$|
= |کل جواب‌ها| − |جواب‌هایی که $y_1\ge 4$ یا $y_2\ge 4$ یا $y_3\ge 4$|

$$=\binom{6+3-1}{3-1}-(\underbrace{\binom{2+3-1}{3-1}}_{\text{جواب‌هایی که } y_1\ge 4}\times 3)=\binom{8}{2}-\binom{4}{2}\times 3=10$$

چه اتفاقی افتاد؟ جواب‌هایی که دوتا از yها یا سه‌تا از آن‌ها بیشتر یا مساوی ۴ باشند وجود ندارند، چون کلاً ۶ تا سکه مانده و نمی‌توانیم به بیش از یک نفر، ۴ سکه بدهیم.

اگر کنجکاو هستید، ۱۰ جواب این است: $\underbrace{(2,2,2)}_{\text{یک‌حالت}},\ \underbrace{(3,2,1)}_{\text{شش‌حالت}},\ \underbrace{(3,3,0)}_{\text{سه‌حالت}}$

۵۳- گزینه‌ی ۳ این یعنی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=9$ با شرایط $1\le x_i\le 4$ چند دسته جواب دارد. اول یک توپ در هر سبد قرار می‌دهیم: (۵ تا توپ دیگر می‌ماند) $y_1+y_2+y_3+y_4=5$

حالا در هر سبد، از این ۵ توپ، حداکثر ۳ تا می‌توان قرار داد: $y_i\le 3$

پس داریم:

|جواب‌هایی که $y_i\le 3$| = |کل| − |جواب‌هایی که حداقل یکی از yها بیشتر یا مساوی ۴ است|

$$=\binom{5+4-1}{4-1}-\underbrace{\binom{1+4-1}{4-1}}_{\text{جواب‌هایی که } y_1\ge 4 \text{ است}}\times 4=\binom{8}{3}-\binom{4}{3}\times 4=56-16=40$$

دقت کنید! جواب‌هایی که دوتا یا بیشتر از بین yها، بیشتر از ۳ باشند وجود ندارند، چون کلاً ۵ تا توپ مانده است.

۵۴- گزینه‌ی ۱ اگر عدد موردنظر $\overline{abc}$ باشد، داریم:

$1\le a\le 9\ ,\ 0\le b\le 9\ ,\ 0\le c\le 9$

$a+b+c=15$

اول یک سکه (!) به a بدهیم: $a'+b+c=14$

$a'\le 8\ ,\ b\le 9\ ,\ c\le 9$

تعداد جواب‌ها = |کل| − |جواب‌هایی که $a'\ge 9$ یا $b\ge 10$ یا $c\ge 10$|

$$=\binom{14+3-1}{3-1}-[\binom{5+3-1}{3-1}+\binom{4+3-1}{3-1}+\binom{4+3-1}{3-1}]$$

$$=\binom{16}{2}-[\binom{7}{2}+\binom{6}{2}+\binom{6}{2}]=120-(21+15+15)=120-51=69$$

دقت می‌کنید که جواب‌هایی به صورت $a'\ge 9$، $b\ge 10$ و ... (اشتراک‌های دو و سه‌تایی) نداریم.

۵۵- گزینه‌ی ۱ تابع حسابی اویلر، این کار را انجام می‌دهد: تعداد اعداد طبیعی کم‌تر یا مساوی N که نسبت به N اول‌اند.

$273=3\times 91=3\times 7\times 13$ $\qquad \phi(N)=N(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots$

$$=273(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{13})=273(\frac{6}{7})(\frac{2}{3})(\frac{12}{13})=6\times 2\times 12=144$$

۵۶- گزینه‌ی ۲ $\phi(231)$ تعداد اعداد طبیعی کم‌تر یا مساوی ۲۳۱ را حساب می‌کند که نسبت به آن اول‌اند:

$$\phi(231)=231(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})=2\times 6\times 10=120$$

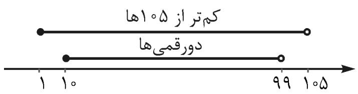
$231=3\times 7\times 11$

پس ۱۲۰تا از اعداد طبیعی کم‌تر یا مساوی ۲۳۱ نسبت به آن اول‌اند، بنابراین ۱۱۰=۱۲۰−۲۳۰ تا عدد طبیعی کم‌تر از ۲۳۱، نسبت به آن غیراول‌اند.

۵۷- گزینه‌ی ۳ $\phi(105)$ تعداد اعداد طبیعی کم‌تر از ۱۰۵ را حساب می‌کند که نسبت به آن اول‌اند:

$$105=3\times 5\times 7 \Rightarrow \phi(105)=2\times 4\times 6=48$$

حالا به این محور نگاه کنید:



φ نشان داد که ۴۸ تا از اعداد کم‌تر از ۱۰۵، نسبت به آن اول هستند اما در این سؤال فقط دورقمی‌ها را می‌خواهیم، پس باید یک‌رقمی و سه‌رقمی‌ها را کنار گذاشت:

۱,۲,۴,۸: اعداد یک‌رقمی که نسبت به ۱۰۵ اول‌اند.

۱۰۱,۱۰۳,۱۰۴: اعداد سه‌رقمی که نسبت به ۱۰۵ اول‌اند.

پس ۴۱ = ۷ − ۴۸ عدد دورقمی نسبت به ۱۰۵ اول‌اند.

از اصل عدم شمول برویم: اعدادی که نسبت به ۱۰۵ اول‌اند، بر هیچ‌یک از اعداد ۳، ۵ و ۷ بخش‌پذیر نیستند.

|نه بر ۳ نه بر ۵ نه بر ۷| = |کل| − |بر ۳ یا ۵ یا ۷|

= |کل| − (مضرب۳ + مضرب۵ + مضرب۷ − مضرب $\underbrace{3,5}_{15}$ − مضرب $\underbrace{3,7}_{21}$ − مضرب $\underbrace{5,7}_{35}$ + مضرب $\underbrace{3,5,7}_{105}$)

$$=\underset{\text{تعداد کل دورقمی}}{\underset{\downarrow}{90}}-([\frac{99}{3}]-[\frac{9}{3}]+[\frac{99}{5}]-[\frac{9}{5}]+[\frac{99}{7}]-[\frac{9}{7}]-[\frac{99}{15}]-[\frac{99}{21}]-[\frac{99}{35}]+[\frac{99}{105}])$$

$$=90-(\underbrace{33-3}_{30}+\underbrace{19-1}_{18}+\underbrace{14-1}_{13}-6-4-2+0)=90-49=41$$

۵۸- گزینه‌ی ۳ رابطه‌ی $\phi(mn)=\phi(m)\phi(n)$ فقط وقتی برقرار است که $(m,n)=1$ باشد و در سایر حالات درست نیست. سایر گزینه‌ها درست‌اند.

۵۹- گزینه‌ی ۳ به‌جز $\phi(1)=\phi(2)=1$، برای اعداد طبیعی دیگر، مقدار ϕ، همواره عددی زوج است؛ پس $\underbrace{(2k+1)^2-2}_{\text{عددفرد}}$ نیست.

۶۰- گزینه‌ی ۳ تجزیه‌ی ۷۵ و ۶۰ را ببینید:

$$75=5^2\times3^1 \quad , \quad 60=2^2\times3^1\times5^1$$

پس عددی که نسبت به ۷۵ و ۶۰ اول است، عامل‌های ۲، ۳ و ۵ را ندارد. با کمی دقت، عدد ۳۰۰ هم از عوامل ۲، ۳ و ۵ ساخته شده است، پس به جای این‌که بگوییم عدد نسبت به ۷۵ و ۶۰ اول است، می‌توانیم بگوییم نسبت به ۳۰۰ اول است. حالا تعداد اعداد طبیعی کم‌تر از ۳۰۱ (کم‌تر یا مساوی ۳۰۰) که نسبت به آن اول‌اند برابر است با:

$$\phi(300)=300(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})=300(\frac{1}{2})(\frac{2}{3})(\frac{4}{5})=80$$

۶۱- گزینه‌ی ۲ هر عددی نسبت به ۲۴۰ اول باشد، نسبت به ۲۴۰۰ هم اول است؛ چون ۲۴۰ و ۲۴۰۰ عوامل یکسان دارند؛ پس در واقع $\phi(2400)$ را می‌خواهیم: $2400=2^5\times5^2\times3$

$$\phi(2400)=2400(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})=2400\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=640$$

۶۲- گزینه‌ی ۱ ۳۰ و ۱۸۰، هر دو از عوامل ۲، ۳ و ۵ ساخته شده‌اند؛ پس هر عددی نسبت به ۱۸۰ اول باشد، نسبت به ۳۰ هم اول است و برعکس. حالا $\phi(180)$ تعداد اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۸۰ را حساب می‌کند اما از ۳۱ به بعد را می‌خواهیم (یعنی ۱ تا ۳۰ را نمی‌خواهیم)، پس $\phi(30)$ را کم می‌کنیم:

$$\phi(180)-\phi(30)$$
$$=180(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})-30(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})$$
$$=180(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5})-30(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5})=6\times8-8=40$$

۶۳- گزینه‌ی ۳ ک.م.م دو عدد طبیعی وقتی حاصل‌ضرب آن‌ها می‌شود که نسبت به هم اول باشند پس $(231,a)=1$ و تعداد جواب‌های a، همان $\phi(231)$ است:

$$231=7\times3\times11 \Rightarrow \phi(231)=2\times6\times10=120$$

۶۴- گزینه‌ی ۴ از $105n+am=1$ طبق قضیه‌ی بزو نتیجه می‌شود که $(105,a)=1$، حالا چون $a<105$ است، تعداد جواب‌های a برابر $\phi(105)$ است:

$$105=3\times5\times7 \Rightarrow \phi(105)=2\times4\times6=48$$

۶۵- گزینه‌ی ۱ شرط وجود جواب در معادله‌ی سیاله را در بخش نظریه‌ی اعداد دیده‌اید، باید داشته باشیم:

$$(24,b^2)\,|\,4 \Rightarrow (2^3\times3^1,b^2)\,|\,2^2$$

خب در تجزیه‌ی b^2، عامل ۳ نباید باشد و 2^3 یا بیشتر هم نباشد پس b مضرب ۳ نیست و مضرب ۴ هم نیست.

تعداد اعداد ۱ تا ۱۰۰ که نه مضرب ۳ و نه مضرب ۴ اند = تعداد جواب‌های b

$$=100-([\frac{100}{4}]+[\frac{100}{3}]-[\frac{100}{12}])=100-(25+33-8)=50$$

۶۶- گزینه‌ی ۱ از $(n,6)=1$ نتیجه می‌شود n عوامل ۲ و ۳ ندارد.

$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow{(n,2)=1} \phi(2n)=\underbrace{\phi(2)}_{1}\phi(n)=\phi(n) \\ \xrightarrow{(n,3)=1} \phi(3n)=\phi(3)\phi(n)=2\phi(n) \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{مساوی‌اند}} \phi(n)=2\phi(n) \Rightarrow \phi(n)=0$$

چنین چیزی امکان ندارد.

۶۷- گزینه‌ی ۱ باید هر یک از اعضای دامنه را به یک عضو B نظیر کنیم؛ پس برای انتخاب $f(1)$، $f(2)$، $f(3)$ و $f(4)$ هر کدام ۳ حالت (۵ یا ۶ یا ۷) داریم. طبق اصل ضرب $3\times3\times3\times3=3^4=81$ تابع وجود دارد.

۶۸- گزینه‌ی ۳ $f(1)$ و $f(3)$ که معلوم‌اند. برای $f(2)$ پنج حالت (a یا b یا c یا d یا e) و برای $f(4)$، چهار حالت (a یا c یا d یا e) داریم؛ پس طبق اصل ضرب $\underset{f(1)}{\underset{\uparrow}{1}}\times\underset{f(2)}{\underset{\uparrow}{5}}\times\underset{f(3)}{\underset{\uparrow}{1}}\times\underset{f(4)}{\underset{\uparrow}{4}}=20$ تابع با این شرایط وجود دارد.

۶۹- گزینه‌ی ۲ برای انتخاب $f(a)$ سه حالت داریم (۱ یا ۲ یا ۳) اما برای $f(b)$، چون در تابع یک‌به‌یک نباید yها تکرار شوند، دو حالت می‌ماند و برای $f(c)$ هم فقط یک حالت؛ پس طبق اصل ضرب $3\times2\times1=6$ تابع یک‌به‌یک امکان دارد.

۷۰- گزینه‌ی ۳ از مجموعه‌ی $\{1,2,3\}$ به خودش (یعنی به $\{1,2,3\}$) کلاً می‌توانیم $3^3=27$ تابع بنویسیم ($f(1)$، $f(2)$ و $f(3)$ هر کدام سه حالت دارند).

تعداد تابع‌های یک‌به‌یک برابر است با: $\underset{f(1)}{\underset{\downarrow}{3}}\times\underset{f(2)}{\underset{\downarrow}{2}}\times\underset{f(3)}{\underset{\downarrow}{1}}=6$

پس $27-6=21$ تابع غیریک‌به‌یک داریم.

۷۱- گزینه‌ی ۳ گفتیم در تابع یک‌به‌یک، تعداد حالت‌های y، یکی‌یکی، کم می‌شود؛ پس برای $f(1)$، پنج حالت، برای $f(2)$، چهار حالت، برای $f(3)$، سه حالت و برای $f(4)$، دو حالت داریم:

$$5\times4\times3\times2=120$$

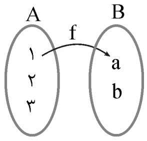
۷۲- گزینه‌ی ۲ $f(1)$ که باید ۱ باشد؛ پس عضو ۱ در B مصرف شد. حالا برای $f(2)$، چهار حالت داریم (۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵) باشد. به همین ترتیب برای $f(3)$ سه حالت و برای $f(4)$ دو حالت می‌ماند؛ پس $4\times3\times2=24$ تابع یک‌به‌یک می‌توان نوشت.

۷۳- گزینه‌ی ۳ باید از هر سه عضو ۱، ۲ و ۳ در B استفاده کنیم. چون دامنه هم سه عضو دارد، دقیقاً هر عضو B یک‌بار به کار می‌رود؛ یعنی فقط باید عضوهای B را در مقابل اعضای A مرتب کرد؛ پس $3!=6$ حالت داریم.

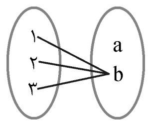
از یک مجموعه‌ی n عضوی به یک مجموعه‌ی n عضوی، توابع یک‌به‌یک و پوشا یکی هستند، یعنی وقتی $|A|=|B|$، یک‌به‌یک و پوشا بودن معادل‌اند و تعداد آن‌ها هم $n!$ است.

۷۴- گزینه‌ی ۴ از $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ به $\{۱,۲\}$، کلاً $۲^۵=۳۲$ تابع داریم. دوتا از آن‌ها پوشا نیستند (یکی تابع ثابت $f(x)=۱$ و دیگری $f(x)=۲$)؛ پس $۳۲-۲=۳۰$ تابع پوشا داریم.

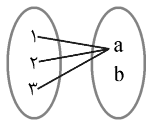
۷۵- گزینه‌ی ۲ به نمودار ون دقت کنید:



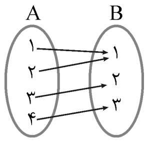
این تابع‌ها وقتی غیرپوشا هستند که فقط از یک عضو B استفاده کنند، یعنی ثابت باشند، پس فقط دو تابع غیرپوشا داریم:



یا



۷۶- گزینه‌ی ۳ به این نمودار ون دقت کنید:



چون دامنه چهارعضوی و برد سه‌عضوی است، باید دقیقاً دوتا از اعضای A، هم‌مقصد باشند (یعنی به یک عضو B نظیر شوند)؛ پس اول دو عضو A را انتخاب کنیم: $\binom{۴}{۲}$؛ سپس این گروه و دو عضو دیگر، روی هم سه‌تا هستند که باید سه عضو B را بپوشانند که $۳!$ حالت دارد؛ پس در کل $\binom{۴}{۲}\times ۳!=۳۶$ تابع پوشا داریم.

$$|\text{توابع پوشا}|=|\text{کل توابع}|-|\text{توابع غیرپوشا}|$$

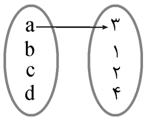
$$=۳^۴-|\text{توابعی که ۱ یا ۲ یا ۳ در B را نمی‌پوشانند}|$$

$$=۳^۴-(\underbrace{|۱\notin R|}_{\text{از ۲ و ۳ استفاده شده}}+|۲\notin R|+|۳\notin R|-|۱,۲\notin R|-|۱,۳\notin R|$$

$$-|۲,۳\notin R|+|۱,۲,۳\notin R|)$$

$$=۳^۴-(۲^۴+۲^۴+۲^۴-۱^۴-۱^۴-۱^۴+۰^۴|=۳۶$$

۷۷- گزینه‌ی ۲ عضو a که ۳ را پوشانده:



پس b، c و d هم باید ۱، ۲ و ۴ را بپوشانند، پس $۳!=۶$ حالت داریم.

۷۸- گزینه‌ی ۲ باید ۱، ۲ و ۳ به سه عضو متمایز B، به ترتیب صعودی نظیر شوند. پس ۳ عضو از B برمی‌داریم: $\binom{۵}{۳}=۱۰$ و اعضای A را به ترتیب به آن‌ها نظیر می‌کنیم.

پاسخ آزمون جامع

۱- گزینه‌ی ۴ ضرب دوتا پرانتز برابر ۷ شده، پس دو راه داریم: ۷×۱ یا ۱×۷

الف $\begin{cases} x+y=7 \\ u+v+t=1 \end{cases}$

$$\text{تعداد جواب} = \binom{7+2-1}{2-1}\times\binom{1+3-1}{3-1}=\binom{8}{1}\binom{3}{2}=24$$

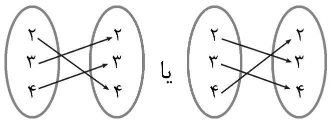
ب $\begin{cases} x+y=1 \\ u+v+t=7 \end{cases}$

$$\text{تعداد جواب} = \binom{1+2-1}{2-1}\times\binom{7+3-1}{3-1}=\binom{2}{1}\times\binom{9}{2}=72$$

پس روی هم $96=24+72$ جواب داریم.

یک بار دیگر برای خودتان مرور کنید که کجا باید در هم ضرب کنیم؟ کجا باید با هم جمع کنیم؟

۲- گزینه‌ی ۱ فقط یک عضو را ثابت نگه می‌دارد، یعنی فقط برای یک عضو، $f(x)=x$ است. خب اول آن یک عضو را از بین ۱، ۲، ۳ و ۴ انتخاب کنیم: $4=\binom{4}{1}$ حالت. حالا سه عضو دیگر داریم که هیچ‌یک به خودش نظیر نمی‌شود. مثلاً ۲، ۳ و ۴ را در نظر بگیرید:



دو حالت وجود دارد که در ۳ عضو، هیچ‌یک به خودش نظیر نشود؛ پس $8=2\times4$ حالت داریم.

۳- گزینه‌ی ۴ به جای $\sqrt{x_1}$، $\sqrt{x_2}$ و $\sqrt{x_3}$ به ترتیب y_1، y_2 و y_3 قرار می‌دهیم؛ پس داریم $y_1+y_2+y_3=9$. چون جواب طبیعی و $x_2>13$ را می‌خواهیم، داریم:

$$y_1\geq1\,,\ y_2>\sqrt{13}\ \Rightarrow\ y_2\geq4\,,\ y_3\geq1$$

پس معادله‌ی جدید $y'_1+y'_2+y'_3=9-1-4-1$ است:

$$y'_1+y'_2+y'_3=3$$

تعداد جواب‌ها برابر است با: $\xrightarrow[k=3]{n=3}\binom{3+3-1}{3-1}=\binom{5}{2}=10$

۴- گزینه‌ی ۴ یک مجهول اضافه کرده و نامعادله را به معادله تبدیل می‌کنیم: $x+y+z\leq6\ \Rightarrow\ x+y+z+t=6$

$$\xrightarrow[k=4]{n=6}\binom{6+4-1}{4-1}=\binom{9}{3}=84$$

۵- گزینه‌ی ۴ باید $x_1+x_2+x_3=10$ را با شرط $x_1\geq2$ حل کنیم:

$$x'_1+x_2+x_3=10-2=8\ \xrightarrow[k=3]{n=8}\binom{8+3-1}{3-1}=\binom{10}{2}=45$$

۶- گزینه‌ی ۱ $\phi(120)$ تعداد اعداد طبیعی کم‌تر یا مساوی ۱۲۰ را می‌شمارد که نسبت به آن اول‌اند: $120=2^3\times3^1\times5^1$

$$\phi(120)=120\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=120\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)=32$$

حالا ما فقط دورقمی‌ها را می‌خواهیم؛ پس باید یک‌رقمی‌ها و سه‌رقمی‌ها را حذف کنیم:

$$(\text{یک‌رقمی‌هایی که نسبت به ۱۲۰ اول‌اند})=\{1,7\}$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{سه‌رقمی‌های از ۱۰۰ تا ۱۲۰}\\ \text{که نسبت به ۱۲۰ اول‌اند}\end{array}\right)=\{101,103,107,109,113,119\}$$

پس از این ۳۲ تا که به کمک ϕ پیدا کردیم، ۲ تا یک‌رقمی و ۶ تا سه‌رقمی هستند. تعداد دورقمی‌های موردنظر برابر است با:

$$32-2-6=24$$

در واقع تعداد اعداد دورقمی را می‌خواهیم که نه بر ۲ و نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش‌پذیرند:

$$|\text{کل}|-|\text{۲ یا ۳ یا ۵}|=90-\left(\left[\frac{99}{2}\right]-\left[\frac{9}{2}\right]+\left[\frac{99}{3}\right]-\left[\frac{9}{3}\right]+\left[\frac{99}{5}\right]-\left[\frac{9}{5}\right]\right.$$
$$\left.-\left[\frac{99}{6}\right]+\left[\frac{9}{6}\right]-\left[\frac{99}{10}\right]-\left[\frac{99}{15}\right]+\left[\frac{99}{30}\right]\right)$$
$$=90-(45+30+18-15-9-6+3)=24$$

۷- گزینه‌ی ۴ می‌دانیم که اعداد اول غیرمساوی، نسبت به هم اول‌اند و وقتی اعداد نسبت به هم اول باشند، ϕ روی ضرب پخش می‌شود:

$$\phi(a\times b\times c)\ \xrightarrow[\text{به هم اول‌اند}]{\text{ab و c نسبت}}\ =\underbrace{\phi(ab)}_{k}\underbrace{\phi(c)}_{c-1}=k(c-1)$$

۸- گزینه‌ی ۴ این اعداد باید حتماً ۰ و ۲ را داشته باشند.

(دقت می‌کنید که در مبنای ۴، ارقام ۴، ۶ و ۸ را نداریم)

$$|\text{۰ و ۲ دارند}|=|\text{کل}|-|\text{۲ یا ۰ ندارند}|$$
$$=|\text{کل}|-(|\text{۲ ندارند}|+|\text{۰ ندارند}|-|\text{۰ و ۲ ندارند}|)$$
$$=\underset{0,1,2,3}{\underline{3}\times\underline{4}\times\underline{4}\times\underline{4}}-\left(\underset{0,1,3}{\underline{2}\times\underline{3}\times\underline{3}\times\underline{3}}+\underset{1,2,3}{\underline{3}\times\underline{3}\times\underline{3}\times\underline{3}}-\underset{1,3}{\underline{2}\times\underline{2}\times\underline{2}\times\underline{2}}\right)$$
$$=192-(54+81-16)=192-119=73$$

۹- گزینه‌ی ۲

$$|\text{هیچ مجله}|=|\text{کل}|-|\text{حداقل یک مجله}|=|S|-|A\cup B\cup C|$$
$$=100-(|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|$$
$$+|A\cap B\cap C|)=100-(51+49+50-28-20-19+10)=7$$

۱۰- گزینه‌ی ۱ طبق صورت سؤال باید $1\leq x_1\leq3$، $2\leq x_2\leq4$ و $3\leq x_3\leq5$ باشد که این امکان ندارد، چون جمع x_1، x_2 و x_3 به ۲۰ نمی‌رسد (حداکثر ۱۲ می‌شود)؛ پس چنین جواب‌هایی وجود ندارند.