ریاضی ۱ تکمیلی خیلی‌سبز

[مقدمه‌ی مؤلف]   ریاضیدان‌ها پولدارترین آدم‌های روی زمین هستند!

گلاب به رویتان در یک مکان اورژانسی (!) بودم که یک‌دفعه ارشمیدس‌گونه زدم بیرون و دویدم در اتاق اندرون و ۲۰۰km/h ۲۰۰km/h (یعنی تندتند!) شروع به سیاه‌کردن کاغذ کردم و عرق از سر و روی بر کاغذِ کا (!) می‌ریختم و ... نفس در سینه حبس کرده بودم و ... نیم‌ساعت بعد ... .

شانس آوردم کسی در خانه نبود و می‌توانستم با تمام وجود هیجاناتم را بروز دهم! بی‌پرده!

تقریباً (مِن‌باب مزاح با فصل ۱، نمی‌دانم با دقت چند رقم اعشار!) تا یک ساعت دور خانه می‌چرخیدم، بالا و پایین می‌پریدم، می‌خوابیدم روی زمین و دوباره بلند می‌شدم، پشتک می‌زدم، بشکن می‌ترکاندم، و خدا را شکر که جساراتاً حرکات موزون بلد نبودم ... . ولی خب مثل فوتبالیست‌ها لباسم را درمی‌آوردم و دوباره می‌پوشیدم و ... . خلاصه بساطی!

تا به حال در عمرم هیچ‌وقت مثل آن لحظه خوشحال و هیجان‌زده نشده‌ام و کسانی که مرا می‌شناسند و می‌دانند چه آدم سرد و بی‌تفاوتی هستم (!)، اصلاً نمی‌توانند تصور چنین جلافت‌هایی (!) را بکنند.

و همه‌ی این‌ها چیزی نبود جز لذت ریاضی! (البته از نوع اورژانسی‌اش!)

بیش از یک ماه بود که داشتم شب و روز (واقعاً شب و روز و البته همراه با وِل‌کردنِ دقیقاً تمام درس‌هایم!) روی یک مسئله‌ی ریاضی فکر می‌کردم. مسئله را معلم هندسه‌مان (آقای نجابت؛ از همین‌جا دستش را می‌بوسم) به ما داده بود و جایزه هم داشت (از نوع بنزی‌اش نه؛ از نوع نمره‌ای‌اش!) و بعدها فهمیدم که سؤالِ المپیاد بوده. نمی‌دانید وقتی بعد از آن همه تلاش توانستم سؤال را حل کنم چه لذتی داشتم. وای خدای من! ممنون.

لذت‌های زیادی در این دنیا هست (اگرچه سختی‌هایش بیشتر است) ولی شیرین‌ترین لذت‌ها آن‌هایی هستند که نتیجه‌ی یک معامله‌اند؛ معامله‌ای که شما باید سختی‌هایی را تحمل کنید تا به آن لذت‌ها برسید. از نوع نابرده رنج، گنج میسر نمی‌شودش! مثلاً باید به خودت سختی بدهی، از خواب شیرین بگذری، صبح زود بیدار شوی و نماز بخوانی تا لذت آن را بچشی. شاید اگر نماز صبح ساعت ۱۰ بود، دیگر آن لذت را نداشت!

شما الآن در مرحله‌ای هستید که باید لذت‌هایی را که می‌توانید از زندگی ببرید، معلوم کنید؛ شاگرد اول شدن، قبول‌شدن در کنکور، رتبه‌ی زیر هزار شدن، رتبه ۱ کنکور شدن، مدال طلای المپیاد جهانی، ... کدام یکی را انتخاب می‌کنید؟ ... نکند اصلاً به فکر لذت‌های دیگری هستید؟ ... [برای عوض‌شدن بحث آماده شوید] ... نه، نه؛ شما این کتاب را ترجیح می‌دهید. چون این کتاب برای کسانی است که می‌خواهند در مسیری پرلذت و صد البته سخت، قدم بگذارند. تکیه بر کتاب درسی و آموزش‌های مدرسه زیاد لذت‌بخش نیست.

... باور درستی از خودتان داشته باشید!

در هر فصل این کتاب، یک چنین چیزهایی می‌بینید:

۱۰ سؤال تشریحی دست‌گرمی که سؤالات اول هر فصل هستند. این سؤالات ساده‌اند و صرفاً برای مروری سریع بر کتاب درسی و مطالبی که باید بلد باشید، آورده شده‌اند. به خاطر سادگی آن‌ها، حل کاملشان را نیاورده‌ایم و به راهنمایی‌هایی برای حلشان اکتفا کرده‌ایم. در دست‌گرمی‌ها، تقریباً تمام موضوعات فصل مرور شده‌اند.

تذکر مهم: اگر حل دست‌گرمی‌ها برایتان آسان نیست (مثل آب‌خوردن)، به هیچ‌وجه اصراری برای خواندن این کتاب نداشته باشید. مطالعه‌ی «ریاضی ۱» معمولی ما که سطح پایین‌تری نسبت به این کتاب دارد، برای شما مفیدتر است. شاید بعد از خواندن آن کتاب، آمادگی لازم را برای مطالعه‌ی این کتاب پیدا کنید. ان‌شاءا...

- تعدادی سؤال تشریحی با حل کامل و مبسوط که بلافاصله بعد از دست‌گرمی‌ها آمده‌اند. حواستان باشد که **این، کتاب ریاضی ۱ نیست! بلکه کتاب ریاضی ۱ «تکمیلی» است.** در واقع، در طراحی و انتخاب سؤالات، این دید را داشته‌ایم که شما تمام سؤالاتِ مرتبط با کتاب درسی، امتحانات و ... را بلد هستید و حالا به دنبال گلچینی از سؤالات زیبا و قوی هستید و حتی می‌خواهید خودتان را برای شرکت در مسابقات و المپیادها آماده کنید. در این کتاب، در واقع **قصد داشته‌ایم نوعی خلأ را پر کنیم که بین «کتاب درسی و مدرسه» و «المپیادها» وجود دارد.** بیشتر کتاب‌هایی که در دسته‌ی اول قرار دارند، به درد دومی نمی‌خورند و بیشتر کتاب‌های دسته‌ی دوم هم فاصله‌ی علمی زیادی با اولی دارند که هم از نظر محتوا و هم از نظر سطح است. در این کتاب، با تکیه بر محتوای کتاب درسی، رویکردی هم به مسابقات و المپیادها داشته‌ایم.

۱۰ سؤال تشریحی زورآزمایی که سؤالات پایانی هر فصل هستند. از آن‌جا که وجود سؤالاتِ دارای جواب باعث می‌شود زیاد روی آن‌ها فکر نکنید (متأسفانه!)، این ۱۰ سؤال را گذاشته‌ایم تا بلکه شما هم مفتخر به همان لذت ریاضی‌ای که اول کار گفتم شوید. البته امیدوارم مال شما از نوع اورژانسی‌اش نباشد! برای این سؤالات، راهنمای حل هم گذاشته‌ایم.

- ۳۰ تست چهارگزینه‌ای. بعضی ایده‌ها در سؤالات تشریحی و بعضی ایده‌ها در تست‌ها قابل مطرح کردن هستند. به همین خاطر وجود تست در کتاب یک ضرورت بود. پاسخ کلیدی تست‌ها را هم آورده‌ایم. حواستان باشد که تست‌ها را با شیوه‌ی تشریحی حل نکنید؛ قلق‌های تستی هم هست!

قسمتی از کتاب ریاضی۱ تکمیلی خیلی‌سبز انتخاب شده از فصل سوم کتاب، شامل تمام سؤالات تشریحی به همـراه پاسـخ تعدادی از آن‌ها.

۱- در یک مربع، وسط‌های ضلع‌های روبه‌رو را به هم وصل می‌کنیم. سپس در هر یک از مربع‌های حاصل نیز همین کار را انجام می‌دهـیم. اگر ۶ بار دیگر این کار را تکرار کنیم، در شکل آخر، تعداد کوچک‌ترین مربع‌ها چندتا خواهد بود؟

۲- عدد 4^6 را به‌صورت ضرب دو عدد توان‌دار بنویسید که یکی ۱۶ برابر دیگری باشد.

۳- حاصل عبارت $\dfrac{2^{4n}+4^{2n}+16^{n}}{2^{4n+3}+4^{2n}}$ چیست؟

۴- الف) آیا می‌توان عددی منفی پیدا کرد که وقتی به توان عددی طبیعی می‌رسد، حاصل ۲۵۶ شود؟
ب) آیا می‌توان یک عدد صحیح منفی پیدا کرد که وقتی به توان عددی طبیعی می‌رسد، حاصل ۵۱۲ شود؟

۵- قسمت صحیح اعداد $\sqrt{40}$ و $\sqrt[3]{12}$ را پیدا کنید.

۶- اگر $b<0<a$ باشد، حاصل $\sqrt{(b-1)^2}+\sqrt{(a+2)^2}$ چیست؟

۷- در هر یک از حالت‌های زیر، کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌ی $\{a^2,a^3,a^4,a^5\}$ را مشخص کنید.
الف) $1<a$ **ب)** $0<a<1$ **ج)** $-1<a<0$ **د)** $a<-1$

۸- حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.
الف) $(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1})(ab+ac+bc)^{-1}$
ب) $(a^{-1}+a^{-1}b+ab^{-1}+b^{-1})^{-1}$

۹- عبارت $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$ را ساده کنید.

۱۰- مخرج $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}$ را گویا کنید.

۱۱- در هر یک از دو حالت زیر تعیین کنید a چند برابر b است؟

الف) $a=2^{3^4}\quad,\quad b=4^{3^2}$ **ب)** $a=17^{92}\quad,\quad b=289^{115}$

۱۲- اعداد 8^{1998}، 5^{2997} و 3^{3996} را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

۱۳- اعداد مقابل را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$4^{3^5}\quad,\quad 10^{369}\quad,\quad 5^{492}\quad,\quad 3^{861}\quad,\quad 2^{1107}$

۱۴- اعداد $0/1\sqrt[3]{3/25}$، $0/2\sqrt[3]{0/41}$ و $0/3\sqrt[3]{0/12}$ را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

۱۵- اعداد مقابل را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$\dfrac{1}{\sqrt{6}}\quad,\quad \dfrac{\sqrt{5}}{5}\quad,\quad \dfrac{\sqrt{3}}{4}\quad,\quad \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

۱۶- بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌ی $\left\{\dfrac{\sqrt[3]{n}}{n}\mid n\in\mathbb{N}-\{1\}\right\}$ چیست؟

۱۷- اعداد مقابل را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$\dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}{3}\quad,\quad \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}\quad,\quad \dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}\quad,\quad \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

۱۸- سه عدد مقابل را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$\sqrt{6}+\sqrt{8}\quad,\quad \sqrt{5}+\sqrt{7}\quad,\quad 2\sqrt{6}$

۱۹- $\sqrt{450}-\sqrt{1922}$ بزرگ‌تر است یا $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{192}+\sqrt[3]{3000}$؟ ادعای خود را ثابت کنید.

۲۰- از دو عدد $a=(\frac{2}{3})^{\frac{2}{3}}(\frac{3}{5})^{\frac{3}{5}}(\frac{5}{2})^{\frac{5}{2}}$ و $b=(\frac{2}{3})^{\frac{3}{2}}(\frac{3}{5})^{\frac{5}{3}}(\frac{5}{2})^{\frac{2}{5}}$، کدام‌یک از ۱ کوچک‌تر و کدام‌یک از ۱ بزرگ‌تر است؛ چرا؟

۲۱- اگر برای محاسبه‌ی مقدار 14^{40} از هیچ عملی جز ضرب استفاده نکنیم، حداقل چند بار باید عمل ضرب را انجام دهیم؟ (با شروع از خود ۱۴)

۲۲- رقم یکان 1387^{1387} چیست؟

۲۳- رقم یکان $2^{1388}-2^{1387}$ چند است؟

۲۴- عدد 5^{55} را به صورت حاصل‌ضرب n عدد طبیعی متمایز نوشته‌ایم. حداکثر n چند است؟

۲۵- عدد 595^{595} را به صورت حاصل‌ضرب n عدد طبیعی متمایز غیر از ۱ نوشته‌ایم. حداکثر مقدار ممکن برای $n+\frac{1}{3}n^2$ چیست؟

۲۶- حاصل‌ضرب چند عدد طبیعی متمایز ۴۱۳۱ شده است. اگر بزرگ‌ترین عدد سه برابر کوچک‌ترین عدد باشد، مجموع اعداد چیست؟

۲۷- همه‌ی اعداد طبیعی را که حاصل‌ضرب ارقامشان ۱۸۰۰ است و رقم ۱ ندارند، در نظر بگیرید. بزرگ‌ترین این اعداد چه‌قدر از کوچک‌ترین آن‌ها بیشتر است؟

۲۸- کوچک‌ترین عدد طبیعی که باید در $(۰/۲)^{۳}(۱/۶)^{۵}(۱۲/۷۶)^{۷}(۱۲/۵)^{۱۰}$ ضرب کنیم تا حاصل این عبارت عددی طبیعی شود، چند است؟

۲۹- a کوچک‌ترین عدد صحیح شش‌رقمی است که به ازای آن $\sqrt{۵\sqrt[۳]{a}}$ عددی طبیعی است. a چند است؟

۳۰- عدد مثبت x را بیابید طوری‌که $x^{\frac{x}{۴}} = (\frac{x}{۴})^{x}$.

۳۱- اگر k یک عدد طبیعی ثابت و بزرگ‌تر از ۱ باشد، چند عدد طبیعی مانند m وجود دارد به گونه‌ای که $m^{۲} = ۲k^{۲} + ۲^{k}$؟

۳۲- a و b دو عدد طبیعی دلخواه‌اند که $۲a + ۳b = ۷۸$. چند عدد طبیعی مانند c وجود دارد که به ازای آن $۲b - ac$ می‌تواند ۳ شود؟

۳۳- اگر m و n اعدادی طبیعی باشند به گونه‌ای که $(m+n)^{m} = \frac{m}{n} + ۱$ و $(m+n)^{n} = mn + n^{۲}$، آن‌گاه مقدار یا مقادیر ممکن برای m و n چیست؟

۳۴- عدد $۵^{۲^{m}} \times ۶^{۱۰۰۰} \times ۲۸^{۱۲}$ بر ۱۰^{n} بخش‌پذیر است ($m, n \in \mathbb{N}$). در این صورت $n - m$ حداکثر چند است؟

۳۵- جواب معادله‌ی $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = ۳$ چیست؟

۳۶- اگر $a = ۰/\underbrace{۰۰\cdots۰}_{n\ \text{تا صفر}}۱۴۴$ و $b = ۱۲\underbrace{۰۰\cdots۰}_{n\ \text{تا صفر}}$ باشد، حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت نماد علمی بنویسید.

الف) $a + b$ ب) ab ج) $\frac{a}{b}$

۳۷- b عددی صحیح است و $\frac{۳۲۸۰۰۰}{۰/۰۰۲۶۲۴ \times a} = ۱۰^{b}$. در هر یک از حالت‌های زیر، چند مقدار برای عدد حقیقی a وجود دارد؟

الف) $۰/۰۱ < a < ۱۰$ ب) $b < ۰ < a < ۱۰^{۱۰}$

ج) $a < ۲۰ \quad , \quad b < ۱۰۰$ د) $a < b < ۰$

۳۸- عدد $۲^{۲} \times ۳^{۳} \times ۴^{۴} \times \cdots \times ۱۵^{۱۵}$ را به صورت $a \times ۱۰^{b}$ نوشته‌ایم. اگر a عددی طبیعی باشد که رقم یکان آن صفر نیست، b چند است؟

۳۹- اگر a عددی صحیح و b عددی حسابی باشد و $c = a \times ۱۰^{b}$، آن‌گاه a چند باشد تا $|c + ۲/۵۱|$ کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد؟

۴۰- چند عدد طبیعی چهاررقمی وجود دارد که مربع کامل باشد؟

۴۱- بزرگ‌ترین عدد طبیعی هفت‌رقمی که مربع کامل است، چیست؟ (از این مطلب که $\sqrt{۱۰} \simeq ۳/۱۶۲۲۷$ می‌توانید استفاده کنید.)

۴۲- بین $۹^۶$ و $۶^۹$ چند عدد طبیعی وجود دارد که مکعب کامل باشد؟

۴۳- چند عدد طبیعی سه‌رقمی وجود دارد که مکعب کامل باشد؟

۴۴- کوچک‌ترین عدد طبیعی هفت‌رقمی که مکعب کامل باشد، چیست؟

۴۵- چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۴۴۴ وجود دارد که مربع کامل بوده و بر هیچ یک از اعداد اول بزرگ‌تر از ۱۰ بخش‌پذیر نیست؟

۴۶- $B \subset \{۱,۲,۳,\cdots,۱۵\}$ و حاصل‌ضرب عضوهای B مربع کامل است. B حداکثر چند عضو دارد؟

۴۷- فرض کنید $a = ۴۲۳۳۶$. اگر ab مربع کامل و ac مکعب کامل باشد و $b - c = ۱۰۴$، اعداد طبیعی b و c را بیابید.

۴۸- مربع‌های کامل اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰۰ را به‌ترتیب از کوچک به بزرگ و از چپ به راست پشت سر هم می‌نویسیم تا عدد a به دست آید، یعنی:
$a = ۱۴۹۱۶۲۵۳۶۴۹۶۴۸۱۱۰۰۱۲۱\cdots$
۱۱۱۱اُمین رقم a چیست؟

۴۹- اگر $\frac{۱۲۵}{۸} = \frac{۸^{۳n-۱} + ۶^{۱-n}}{۲۰^{۱-n} \times ۴^{۶n-۳} + ۱۵^{۱-n}}$ باشد، مقدار n چیست؟

۵۰- اعداد حقیقی a و b مثبت و متمایزند و $۰ < n < ۱$؛ در این صورت $a^n b^{۱-n}$ بزرگ‌تر است یا $a+b$؟ ادعای خود را ثابت کنید.

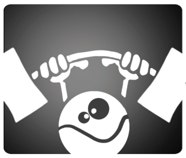
۵۱- عدد مثبت n آن‌قدر بزرگ است که برای هر عدد حقیقی مانند a، اگر $-۱ < a < ۱$ آن‌گاه $a^n \simeq ۰$؛ در این صورت حاصل عبارت $\frac{۴^{۱-۲n} + ۹^{۱-n}}{۳^{۱-۲n} + ۱۰^{۱-n}}$ به کدام عدد صحیح نزدیک‌تر است؟

۵۲- برای هر عدد حقیقی t، اگر $|t|$ بسیار کوچک و نزدیک صفر باشد، $(۱+t)^{\frac{۱}{t}} \simeq ۲/۷$؛ با توجه به این مطلب، بگویید اگر n یک عدد طبیعی دلخواه و بزرگ باشد، $n^{n+۱}$ بزرگ‌تر است یا $(n+۱)^n$؟

۵۳- صد عدد را به ترتیبی نوشته‌ایم که اولی مساوی با ۵ است و هر یک از اعداد دیگر، ۳ برابر عدد قبل از خود است؛ مجموع این صد عدد چیست؟

۵۴- آیا عدد صحیح و مثبتی که توانی طبیعی از ۲ باشد و با جابه‌جایی ارقامش توان طبیعی دیگری از ۲ حاصل شود، وجود دارد؟ چرا؟
(المپیاد ریاضی ایران)

۵۵- اگر بدانیم $\sqrt{۱۰} \simeq ۳/۱۶$ و $\sqrt[۳]{۱۰} \simeq ۲/۱۶$، نشان دهید حاصل‌ضرب اعداد ۱ تا ۴۰ بیش از ۳۷ رقم دارد.



۵۶- سه عدد $۲۳^{۱۰}$، $۱۳^{۱۳}$ و $۷^{۱۸}$ را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

۵۷- عدد حقیقی a مثبت است و $a^۲ = ۰/\underbrace{۹۹\cdots۹}_{\text{۹ مرتبه}}$؛ مقدار تقریبی a با دقت ۹ رقم اعشار چیست؟

۵۸- اگر ارقام یک عدد طبیعی را در جهت معکوس بنویسیم، مقلوب آن عدد به دست می‌آید. مثلاً مقلوب ۱۲۳۴۵، عدد ۵۴۳۲۱ است. حالا فرض کنید $a = ۱۵\underbrace{۹۹\cdots۹۹}_{\text{۱۳۸۸ مرتبه}}۸۴$. نشان دهید حاصل‌ضرب a در مقلوبش، مربع کامل است.

۵۹- اعداد حقیقی a و b مثبت و متمایزند؛ $a^a b^b$ بزرگ‌تر است یا $a^b b^a$؟

۶۰- a عددی حقیقی بین صفر و یک است؛ a^{a^a} بزرگ‌تر است یا $a^{a^{-a}}$؟

۶۱- حاصل $(\sqrt{۱۰۱})^{-۱۲} - (\sqrt{۱۰۱})^{-۹} + (\sqrt{۱۰۱})^{-۴} - (\sqrt{۱۰۱})^{-۱} + ۱$ مثبت است یا منفی؟

۶۲- m عددی طبیعی است؛ چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد طوری‌که m^n با $m^۲ + ۲m$ برابر باشد؟

۶۳- چند عدد طبیعی وجود دارد که دو رقم سمت چپ آن‌ها، به‌ترتیب از چپ به راست، ۳ و ۸ و دو رقم سمت چپ مربعشان ۱ و ۶ باشد؟

۶۴- اگر $۲^a + ۲^b = ۳^c + ۳^d$، آن‌گاه چه تعداد از عددهای a، b، c و d می‌توانند منفی باشند؟

۶۵- می‌دانیم معادله‌ی پنج مجهولی $a^۳ + b^۵ + c^۷ + d^{۱۱} = e^{۱۳}$ حداقل یک جواب دارد. نشان دهید این معادله بی‌شمار جواب دارد.

پاسخ ۱۱

(الف) $a=۲^{۳^{۴}}=۲^{۸۱} \quad , \quad b=۴^{۳^{۲}}=۴^{۹}=(۲^{۲})^{۹}=۲^{۱۸} \quad \Longrightarrow \frac{a}{b}=\frac{۲^{۸۱}}{۲^{۱۸}}=۲^{۶۳}$

(ب) $a=۱۷^{۹۲} \quad , \quad b=۲۸۹^{۱۱۵}=(۱۷^{۲})^{۱۱۵}=۱۷^{۲۳۰} \quad \Longrightarrow \frac{a}{b}=\frac{۱۷^{۹۲}}{۱۷^{۲۳۰}}=\frac{۱}{۱۷^{۱۳۸}}=۱۷^{-۱۳۸}$

پاسخ ۱۲

به پایه‌های مساوی که نمی‌توانیم برسیم (۳ کجا، ۵ کجا، ۸ کجا!)، پس می‌رویم به توان‌های مساوی برسیم:

$$۸^{۱۹۹۸}=(۸^{۲})^{۹۹۹}=۶۴^{۹۹۹} \quad , \quad ۵^{۲۹۹۷}=(۵^{۳})^{۹۹۹}=۱۲۵^{۹۹۹} \quad , \quad ۳^{۳۹۹۶}=(۳^{۴})^{۹۹۹}=۸۱^{۹۹۹}$$

$$۶۴<۸۱<۱۲۵ \Longrightarrow ۶۴^{۹۹۹}<۸۱^{۹۹۹}<۱۲۵^{۹۹۹} \Longrightarrow ۸^{۱۹۹۸}<۳^{۳۹۹۶}<۵^{۲۹۹۷}$$

پاسخ ۱۳

$$۲^{۱۱۰۷}=(۲^{۹})^{۱۲۳} \quad , \quad ۳^{۸۶۱}=(۳^{۷})^{۱۲۳} \quad , \quad ۵^{۴۹۲}=(۵^{۴})^{۱۲۳} \quad , \quad ۱۰^{۳۶۹}=(۱۰^{۳})^{۱۲۳} \quad , \quad ۴^{۳^{۵}}=۴^{۲۴۳}=۲^{۴۸۶}$$

توان چهارتای اول، مساوی است و داریم: $۲^{۹}<۵^{۴}<۱۰^{۳}<۳^{۷} \quad , \quad ۲^{۴۸۶}<۲^{۱۱۰۷}$

بنابراین می‌توان نوشت: $۴^{۳^{۵}}<۲^{۱۱۰۷}<۵^{۴۹۲}<۱۰^{۳۶۹}<۳^{۸۶۱}$

پاسخ ۱۴

ضریب‌ها را می‌بریم زیر $\sqrt[۳]{\ }$ و بعد مقایسه‌ها را انجام می‌دهیم. وقتی ضریب‌ها می‌خواهند بروند زیر $\sqrt[۳]{\ }$، به توان ۳ می‌رسند.

$$۰/۱\sqrt[۳]{۳/۲۵}=\sqrt[۳]{(۰/۱)^{۳}\times ۳/۲۵}=\sqrt[۳]{۰/۰۰۳۲۵}$$

$$۰/۲\sqrt[۳]{۰/۴۱}=\sqrt[۳]{(۰/۲)^{۳}\times ۰/۴۱}=\sqrt[۳]{۰/۰۰۳۲۸}$$

$$۰/۳\sqrt[۳]{۰/۱۲}=\sqrt[۳]{(۰/۳)^{۳}\times ۰/۱۲}=\sqrt[۳]{۰/۰۰۳۲۴}$$

$$۰/۰۰۳۲۴<۰/۰۰۳۲۵<۰/۰۰۳۲۸ \Longrightarrow \sqrt[۳]{۰/۰۰۳۲۴}<\sqrt[۳]{۰/۰۰۳۲۵}<\sqrt[۳]{۰/۰۰۳۲۸} \Longrightarrow ۰/۳\sqrt[۳]{۰/۱۲}<۰/۱\sqrt[۳]{۳/۲۵}<۰/۲\sqrt[۳]{۰/۴۱}$$

البته می‌توانستیم مکعب عددها را با هم مقایسه کنیم.

پاسخ ۱۵

مربع اعداد را راحت‌تر می‌توانیم با هم مقایسه کنیم:

$$(\frac{\sqrt{۲}}{۳})^{۲}=\frac{۲}{۹} \quad , \quad (\frac{\sqrt{۳}}{۴})^{۲}=\frac{۳}{۱۶} \quad , \quad (\frac{\sqrt{۵}}{۵})^{۲}=\frac{۵}{۲۵}=\frac{۱}{۵} \quad , \quad (\frac{۱}{\sqrt{۶}})^{۲}=\frac{۱}{۶}$$

$$\frac{۱}{۶}<\frac{۳}{۱۶}<\frac{۱}{۵}<\frac{۲}{۹} \Longrightarrow \frac{۱}{\sqrt{۶}}<\frac{\sqrt{۳}}{۴}<\frac{\sqrt{۵}}{۵}<\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

پاسخ ۱۶

$$(\frac{\sqrt[۳]{n}}{n})^{۳}=\frac{n}{n^{۳}}=\frac{۱}{n^{۲}}$$

هرچه n بزرگ‌تر باشد، $\frac{۱}{n^{۲}}$ و در نتیجه $\frac{\sqrt[۳]{n}}{n}$ کوچک‌تر می‌شود. پس برای آن‌که $\frac{\sqrt[۳]{n}}{n}$ بزرگ‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد، n باید کم‌ترین مقدار را بگیرد، یعنی ۲ باشد. با این حساب، بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌ی موردنظر، $\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۲}$ است.

پاسخ ۱۷

همه‌ی دوستان را به توان ۶ می‌رسانیم!

$$(\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}})^۶=\frac{۲^۳}{۳^۳}=\frac{۸}{۲۷}\quad,\quad(\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۲})^۶=\frac{۲^۲}{۲^۶}=\frac{۱}{۱۶}\quad,\quad(\frac{\sqrt{۳}}{۲\sqrt[۳]{۲}})^۶=\frac{۳^۳}{۲^۶\times ۲^۲}=\frac{۲۷}{۲۵۶}\quad,\quad(\frac{\sqrt{۲\sqrt[۳]{۲}}}{۳})^۶=\frac{(۲\sqrt[۳]{۲})^۳}{۳^۶}=\frac{۲^۳\times ۲}{۳^۶}=\frac{۱۶}{۳^۶}$$

$$\frac{۱۶}{۳^۶}<\frac{۱}{۱۶}<\frac{۲۷}{۲۵۶}<\frac{۸}{۲۷}\implies\frac{\sqrt{۲\sqrt[۳]{۲}}}{۳}<\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۲}<\frac{\sqrt{۳}}{۲\sqrt[۳]{۲}}<\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$$

در مورد $\frac{۱}{۱۶}>\frac{۱۶}{۳^۶}$، دقت کنید که $\frac{۱}{۱۶}=\frac{۱۶}{۲۵۶}$ و $۳^۶>۲۵۶$.

پاسخ ۱۸

$$(۲\sqrt{۶})^۲=۴\times۶=۲۴$$

$$(\sqrt{۵}+\sqrt{۷})^۲=(\sqrt{۵}+\sqrt{۷})(\sqrt{۵}+\sqrt{۷})=\sqrt{۵}\times\sqrt{۵}+\sqrt{۵}\times\sqrt{۷}+\sqrt{۷}\times\sqrt{۵}+\sqrt{۷}\times\sqrt{۷}=۵+\sqrt{۳۵}+\sqrt{۳۵}+۷=۱۲+۲\sqrt{۳۵}$$

$$(\sqrt{۶}+\sqrt{۸})^۲=(\sqrt{۶}+\sqrt{۸})(\sqrt{۶}+\sqrt{۸})=۶+\sqrt{۴۸}+\sqrt{۴۸}+۸=۱۴+۲\sqrt{۴۸}$$

هم‌چنین: $۲۴=۱۲+۲\times۶=۱۲+۲\sqrt{۳۶}>۱۲+۲\sqrt{۳۵}\quad,\quad ۲۴=۱۴+۲\times۵=۱۴+۲\sqrt{۲۵}<۱۴+۲\sqrt{۴۸}$

یعنی: $۱۲+۲\sqrt{۳۵}<۲۴<۱۴+۲\sqrt{۴۸}\implies(\sqrt{۵}+\sqrt{۷})^۲<(۲\sqrt{۶})^۲<(\sqrt{۶}+\sqrt{۸})^۲\implies\sqrt{۵}+\sqrt{۷}<۲\sqrt{۶}<\sqrt{۶}+\sqrt{۸}$

پاسخ ۱۹

$$\sqrt[۳]{۳۰۰۰}+\sqrt[۳]{۱۹۲}+\sqrt[۳]{۲۴}=\sqrt[۳]{۱۰۰۰\times۳}+\sqrt[۳]{۶۴\times۳}+\sqrt[۳]{۸\times۳}=۱۰\sqrt[۳]{۳}+۴\sqrt[۳]{۳}+۲\sqrt[۳]{۳}=۱۶\sqrt[۳]{۳}$$

$$\sqrt{۱۹۲۲}-\sqrt{۴۵۰}=\sqrt{۹۶۱\times۲}-\sqrt{۲۲۵\times۲}=۳۱\sqrt{۲}-۱۵\sqrt{۲}=۱۶\sqrt{۲}$$

حالا کافی است $\sqrt[۳]{۳}$ را با $\sqrt{۲}$ مقایسه کنیم. برای این کار، به توان ۶ می‌رسانیم:

$$(\sqrt[۳]{۳})^۶=۳^۲=۹\quad,\quad(\sqrt{۲})^۶=۲^۳=۸\implies(\sqrt{۲})^۶<(\sqrt[۳]{۳})^۶\implies\sqrt{۲}<\sqrt[۳]{۳}$$

بنابراین: $۱۶\sqrt{۲}<۱۶\sqrt[۳]{۳}\implies\sqrt{۱۹۲۲}-\sqrt{۴۵۰}<\sqrt[۳]{۳۰۰۰}+\sqrt[۳]{۱۹۲}+\sqrt[۳]{۲۴}$

پاسخ ۲۰

بحث بر سر x^x و $x^{\frac{۱}{x}}$ است. توجیه این نامساوی با درنظرگرفتن دو حالت $۱\le x$ و $۰<x<۱$ ساده است.

> برای هر عدد مثبت x، $x^{\frac{۱}{x}-۱}\le۱\le x^{x-۱}$.

با توجه به این نامساوی، داریم:

$$a=(\frac{۲}{۳})^{\frac{۲}{۳}}(\frac{۳}{۵})^{\frac{۳}{۵}}(\frac{۵}{۲})^{\frac{۵}{۲}}=(\frac{۲}{۳})^{\frac{۲}{۳}-۱}(\frac{۲}{۳})(\frac{۳}{۵})^{\frac{۳}{۵}-۱}(\frac{۳}{۵})(\frac{۵}{۲})^{\frac{۵}{۲}-۱}(\frac{۵}{۲})=(\frac{۲}{۳})^{\frac{۲}{۳}-۱}(\frac{۳}{۵})^{\frac{۳}{۵}-۱}(\frac{۵}{۲})^{\frac{۵}{۲}-۱}>۱\times۱\times۱\implies a>۱$$

$$b=(\frac{۲}{۳})^{\frac{۳}{۲}}(\frac{۳}{۵})^{\frac{۵}{۳}}(\frac{۵}{۲})^{\frac{۲}{۵}}=(\frac{۲}{۳})^{\frac{۳}{۲}-۱}(\frac{۲}{۳})(\frac{۳}{۵})^{\frac{۵}{۳}-۱}(\frac{۳}{۵})(\frac{۵}{۲})^{\frac{۲}{۵}-۱}(\frac{۵}{۲})=(\frac{۲}{۳})^{\frac{۳}{۲}-۱}(\frac{۳}{۵})^{\frac{۵}{۳}-۱}(\frac{۵}{۲})^{\frac{۲}{۵}-۱}<۱\times۱\times۱\implies b<۱$$

برای a از $۱<x^{x-۱}$ و برای b از $x^{\frac{۱}{x}-۱}<۱$ استفاده کردیم. حالت‌های تساوی را هم به خاطر اعداد موجود در صورت سؤال گذاشتیم کنار.

پاسخ ۲۱

توان مهم است، پایه مردنی است!

$$a\xrightarrow[۱]{\times a}a^۲\xrightarrow[۲]{\times a^۲}a^۴\xrightarrow[۳]{\times a^۴}a^۸\xrightarrow[۴]{\times a^۸}a^{۱۶}\xrightarrow[۵]{\times a^{۱۶}}a^{۳۲}\xrightarrow[۶]{\times a^۸}a^{۴۰}$$

دیگر کم‌تر از این نمی‌شود: ۶ تا ضرب. اگر شک دارید، حالت‌های دیگر را هم امتحان کنید. مثلاً:

$$a\xrightarrow{\times a}a^۲\xrightarrow{\times a}a^۳\xrightarrow{\times a^۳}a^۶\xrightarrow{\times a^۶}a^{۱۲}\xrightarrow{\times a^{۱۲}}a^{۲۴}\longrightarrow$$ که‌چی؟

پاسخ ۲۲

برای جواب‌دادن به این سؤال، فقط باید جدول ضرب بلد باشید! چون رقم یکان $۱۳۸۷^{۱۳۸۷}$ را می‌خواهیم، مـی‌رویـم دنبـال رقـم یکـان $۷^{۱۳۸۷}$. رقـم یکان $۷^{۱}$ که هفت است، حالا هفت‌هفت‌تا؟ ۴۹ تا. دهگانش را بیندازید دور؛ نُه هفت‌تا؟ ۶۳ تا. باز هم دهگان را بی‌خیال شوید. سه هفت‌تا؟ ۲۱ تا! یکـان شد ۱. حالا یک هفت‌تا؟! بازم هفت‌تا و روز از نو روزی از نو، یعنی به ترتیب رقم‌های یکان ما ۷، ۹، ۳، ۱ است و همین چهار رقم مدام تکرار می‌شوند. ببینیم ۱۳۸۷اُمین رقم چیست؛ $۱۳۸۷ \div ۴$ می‌شود ۳۴۶ و خُرده! از طرفی $۱۳۸۴ = ۴ \times ۳۴۶$ و $۳ = ۱۳۸۴ - ۱۳۸۷$. حالا در بین ارقام ۷، ۹، ۳ و ۱ سـومین رقم، یعنی ۳، جواب مسئله است.

$۱۳۸۷^{۱}$	$۱۳۸۷^{۲}$	$۱۳۸۷^{۳}$	$۱۳۸۷^{۴}$	$۱۳۸۷^{۵}$	…
رقم یکان ↓ ۷	۱۳۸۷ (۴) ۱۳۸۷ …. ۹ …. ۰ …. ۹	۱۳۸۷ (۶) …. ۹ …. ۳ …. ۰ …. ۳	۱۳۸۷ (۲) …. ۳ …. ۱ …. ۰ …. ۱	۱۳۸۷ …. ۱ …. ۷ …. ۰ …. ۷	

از این‌جا به بعد روز از نو روزی از نو، یعنی همان چهار رقم قبلی تکرار می‌شوند. هی!

پاسخ ۲۳

$$۲ \xrightarrow{\times ۲} ۴ \xrightarrow{\times ۲} ۸ \xrightarrow{\times ۲} ۱۶ \xrightarrow{\times ۲} ۳۲ \xrightarrow{\times ۲} ۶۴ \xrightarrow{\times ۲} ۱۲۸ \xrightarrow{\times ۲} ۲۵۶ \longrightarrow \cdots$$

رقم یکان توان‌های ۲، چهارتا چهارتا تکرار می‌شود. ۱۳۸۸ بر ۴ بخش‌پذیر است، پس رقم یکان $۲^{۱۳۸۸}$ می‌شود چهارمین رقم یعنی ۶. از طرفی $۲^{۱۳۸۷}$ قبل از $۲^{۱۳۸۸}$ است (منظور در بین توان‌های ۲ است)، پس رقم یکان آن رقمی است که در بین چهار یکان فوق، قبل از رقم یکان $۲^{۱۳۸۸}$ یعنی ۶ قرار دارد؛ این رقم، ۸ است. حالا رقم یکان $۲^{۱۳۸۸} - ۲^{۱۳۸۷}$ می‌شود رقم یکان عددی که به ۶ خـتم مـی‌شـود منهـای عـددی کـه بـه ۸ خـتم مـی‌شـود. جواب، $۸ = ۸ - ۱۶$ است.

پاسخ ۲۴

به هرحال، آن n عدد هم توان‌های ۵ هستند. زمانی بیشترین تعداد عدد را خواهیم داشت که کوچک‌ترین توان‌ها را در هم ضرب کنیم.

$$۵^{۵۵} = ۵^{۰} \times ۵^{۱} \times ۵^{۲} \times \cdots \times ۵^{m} = ۵^{۰+۱+۲+\cdots+m} \Longrightarrow ۵^{۵۵} = ۵^{\frac{m(m+۱)}{۲}} \Longrightarrow ۵۵ = \frac{m(m+۱)}{۲} \Longrightarrow m(m+۱) = ۱۱۰ = ۱۰ \times ۱۱ \Longrightarrow m = ۱۰$$

یعنی باید اعداد $۵^{۰}$، $۵^{۱}$، $۵^{۲}$، … و $۵^{۱۰}$ را در هم ضرب کنیم تا با بیشترین تعداد این عددها به $۵^{۵۵}$ برسیم. تعـداد ایـن‌هـا ۱۱ تاسـت (نـه ۱۰ تـا!)، پـس حداکثر n، ۱۱ است. جالب است بدانید که برای افزایش تعداد، ۱ (همان $۵^{۰}$) را هم ضرب کرده‌ایم!

پاسخ ۲۵

یک چیز را می‌دانید؟ $۵۹۵ = ۵ \times ۷ \times ۱۷$. واضح بود که برای پاسخ دادن به چنین سؤالی بایـد ۵۹۵ (پایـه) را بـه عامـل‌هـای اول تجزیـه مـی‌کـردیم. حالا ۵۹۵ می‌شود ضرب توان‌هایی از ۵ و ۷ و ۱۷. برای رسیدن به بیشترین تعداد، باید کوچک‌ترین توان‌های هر پایه را در هم ضرب کنـیم و چـون ۱ را نمی‌خواهیم، توان‌ها را از ۱ شروع می‌کنیم (نه صفر). ضمناً مجموع توان‌های هر پایه باید بشود ۵۹۵.

$$۵۹۵^{۵۹۵} = ۵^{۵۹۵} \times ۷^{۵۹۵} \times ۱۷^{۵۹۵} = (۵^{۱} \times ۵^{۲} \times \cdots \times ۵^{m})(۷^{۱} \times ۷^{۲} \times \cdots \times ۷^{m})(۱۷^{۱} \times ۱۷^{۲} \times \cdots \times ۱۷^{m}) = ۵^{۱+۲+\cdots+m} \times ۷^{۱+۲+\cdots+m} \times ۱۷^{۱+۲+\cdots+m}$$

$$۱+۲+\cdots+m = \frac{m(m+۱)}{۲} = ۵۹۵ \Longrightarrow m^{۲} + m = ۱۱۹۰ \Longrightarrow m^{۲} + m - ۱۱۹۰ = ۰ \Longrightarrow m^{۲} + m = ۱۱۹۰$$

کاری نداریم m دقیقاً چند است ($m = ۳۴$!)؛ برای رسیدن به حداکثر n، m تا توان ۵، m تا توان ۷ و m تا توان ۱۷ داریم؛ یعنی در مجمـوع، $۳m$ عدد داریم. $m^{۲} + m$ می‌شود ۱۱۹۰، پس $\frac{۱}{۳}n^{۲} + n$ حداکثر می‌شود: $\frac{۱}{۳}(۳m)^{۲} + ۳m = ۳m^{۲} + ۳m = ۳(m^{۲} + m) = ۳ \times ۱۱۹۰ = ۳۵۷۰$

(به جای n گذاشتیم $۳m$ و بعد ... بازی تمام شد!)

پاسخ ۲۶

اول ببینیم ۴۱۳۱ چی هست! یعنی آن را تجزیه کنیم: $۴۱۳۱ = ۳^۵ \times ۱۷$

۱۷ یکی از اعداد است اما نه بزرگ‌ترین آن‌ها (چون مضرب ۳ نیست) و نه کوچک‌ترین آن‌هاست (اگر ۱۷ کوچک‌ترین عدد باشد، بزرگ‌ترین عدد می‌شود ۱۷×۳ و آن وقت ضرب آن‌ها دوتا عامل ۱۷ خواهد داشت، در صورتی که ۴۱۳۱ فقط یک عامل ۱۷ دارد). حالا کوچک‌ترین عدد را می‌گیریم a و بزرگ‌ترین عدد را می‌گیریم b. با حرف‌هایی که زدیم، داریم: $a < ۱۷ < b$ که چون $b = ۳a$، نتیجه می‌شود $a < ۱۷ < ۳a$. پس می‌توان نوشت $a > \frac{۱۷}{۳}$. اما a توانی از ۳ است و چون از $\frac{۱۷}{۳}$ بزرگ‌تر است، ۳ نیست. راحت‌تر بگوییم: $a = ۳^۲$. با این حساب، بزرگ‌ترین عدد، $۳a = ۳^۳$ است.

یعنی ۴۱۳۱ را این‌گونه نوشته‌ایم: $۳^۳ \times ۱۷ \times ۳^۲$. حاصل‌جمع این اعداد می‌شود: $۹ + ۱۷ + ۲۷ = ۵۳$

پاسخ ۲۷

اول دقت کنید که: $۱۸۰۰ = ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵^۲$

حالا راحت‌تر می‌توان بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عددی را که حاصل‌ضرب ارقامش ۱۸۰۰ باشد تعیین کرد. اولین چیزی که این وسط مهم است، تعداد ارقام است.

بزرگ‌ترین عدد ۷ = ۲+۲+۳ (جمع توان‌ها) رقم دارد و در آن، ارقام ۵ و ۳ و ۲ از بزرگ به کوچک و از چپ به راست چیده شده‌اند. این عدد ۵۵۳۳۲۲۲ است.

کوچک‌ترین عدد باید کم‌ترین تعداد رقم را داشته باشد. $۸ = ۲^۳$ و $۹ = ۳^۲$، پس ارقام این عدد ۸ و ۹ و ۵ است. یک ۸ داریم، یک ۹ و دوتا ۵. این عدد ۵۵۸۹ است. حالا: $۵۵۳۳۲۲۲ - ۵۵۸۹ = ۵۵۲۷۶۳۳$

پاسخ ۲۸

$$a = (۰/۲)^۳(۱/۶)^۳(۱۲/۵)^۳ = ۴^۳ \quad , \quad b = (۱۲/۷۶)^۷(۱۲/۵)^۷ = (۱۵۹/۵)^۷ \quad , \quad c = (۱/۶)^۲ = (۱۶ \times ۱۰^{-۱})^۲ = ۴^۴ \times ۱۰^{-۲}$$

$$(۰/۲)^۳(۱/۶)^۵(۱۲/۷۶)^۷(۱۲/۵)^{۱۰} = abc = ۴^۳ \times (۱۵۹/۵)^۷ \times ۴^۴ \times ۱۰^{-۲} = ۴^۷(۱۵۹/۵)^۷ \times ۱۰^{-۲} = ۶۳۸^۷ \times ۱۰^{-۲}$$

$$= \frac{۶۳۸^۷}{۱۰۰} = \frac{۲^۲ \times ۲^۵ \times ۳۱۹^۷}{۲^۲ \times ۵^۲} = \frac{۲^۵ \times ۳۱۹^۷}{۲۵}$$

کوچک‌ترین عددی که باید در عبارت موردنظر ضرب شود، ۲۵ است.

پاسخ ۲۹

$$\sqrt{۵\sqrt[۳]{a}} = \sqrt{\sqrt[۳]{۵^۳ a}} = \sqrt[۶]{۵^۳ a}$$

برای آن‌که عدد بالا طبیعی باشد، باید زیر $\sqrt[۶]{\ }$، توان ششم یک عدد صحیحِ غیرصفر باشد. پس a حتماً $۵^۳$ را دارد، یعنی a به صورت $۵^۳$ ضرب‌در توان ششم عدد دیگری است (علت این‌که a، $۵^۳$ را دارد، این است که باید آن $۵^۳$ای که الآن زیر $\sqrt[۶]{\ }$ است، توانش به ۶ برسد). از طرفی، a کوچک‌ترین مقدار شش‌رقمی خود را دارد. محاسبه‌ی زیر می‌گوید جواب مسئله $a = ۵۱۲۰۰۰$ است:

$$۵^۳ \times ۲^۳ = ۸۰۰۰ \quad , \quad ۵^۳ \times ۳^۳ = ۹۱۱۲۵ \quad , \quad ۵^۳ \times ۴^۳ = ۵۱۲۰۰۰$$

پاسخ ۳۰

$$x^{\frac{x}{۴}} = (\frac{x}{۴})^x \Longrightarrow (x^{\frac{۱}{۴}})^x = (\frac{x}{۴})^x \xrightarrow{x > ۰} x^{\frac{۱}{۴}} = \frac{x}{۴} \xrightarrow{\div x} x^{\frac{۱}{۴} - ۱} = \frac{۱}{۴} \Longrightarrow x^{-\frac{۳}{۴}} = \frac{۱}{۴} \Longrightarrow (x^{-\frac{۳}{۴}})^{-\frac{۴}{۳}} = (\frac{۱}{۴})^{-\frac{۴}{۳}} \Longrightarrow x = (\frac{۱}{۴})^{-\frac{۴}{۳}}$$

$$= ۴^{\frac{۴}{۳}} = ۴ \times ۴^{\frac{۱}{۳}} \Longrightarrow x = ۴\sqrt[۳]{۴}$$

پاسخ ۳۱

طرف راست تساوی یعنی $2k^2+2^k$ زوج است، پس طرف چپ تساوی یعنی m^2 هم زوج است. بنابراین خود m عددی زوج است، یعنی عددی طبیعی مانند m_1 وجود دارد که $m=2m_1$. حالا:

$$m^2=2k^2+2^k \xrightarrow{m=2m_1} (2m_1)^2=2k^2+2^k \Longrightarrow 4m_1^2=2k^2+2^k \xrightarrow{\div 2} 2m_1^2=k^2+2^{k-1}$$

$2m_1^2$ زوج است، پس k^2+2^{k-1} هم زوج است. اما چون 2^{k-1} زوج است، k^2 هم باید زوج باشد، پس k هم زوج است. یعنی عددی طبیعی مانند k_1 وجود دارد که $k=2k_1$.

$$2m_1^2=k^2+2^{k-1} \xrightarrow{k=2k_1} 2m_1^2=(2k_1)^2+2^{2k_1-1} \Longrightarrow 2m_1^2=4k_1^2+2^{2k_1-1} \xrightarrow{\div 2} m_1^2=2k_1^2+2^{2k_1-2}$$

باز طرف راست تساوی زوج است، پس طرف چپ یعنی m_1^2 هم زوج است و در نتیجه m_1 زوج است، یعنی عددی طبیعی مانند m_2 وجود دارد که $m_1=2m_2$. این بازی ادامه دارد، یعنی m هی نصف می‌شود و نصف آن هم باز زوج است.

به عبارت دیگر، m بر هر توانی از ۲ بخش‌پذیر است! به نظرتان کدام عدد است که بر هر توانی از ۲ بخش‌پذیر است؟ آیا عددی غیر از صفر این ویژگی را دارد؟ اما m طبیعی است و نمی‌تواند صفر باشد. پس m کلاً وجود خارجی ندارد!