

## هذلولی

۱۷۹- مکان هندسی نقاطی که قدرمطلق فواصل آن‌ها از دو نقطه‌ی  $F = (۴, ۵)$  و  $F' = (-۴, ۵)$  برابر ۴ باشد، کدام است؟

$$\frac{y^2}{4} - \frac{(x-5)^2}{12} = 1 \quad (۴) \quad \frac{x^2}{4} - \frac{(y+5)^2}{12} = 1 \quad (۳) \quad \frac{x^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{12} = 1 \quad (۲) \quad \frac{x^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{9} = 1 \quad (۱)$$

۱۸۰- مختصات یکی از رئوس کانونی هذلولی  $\frac{x^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$  کدام است؟

$$(۲, -۱) \quad (۲) \quad (-۲, ۱) \quad (۳) \quad (۰, -۱) \quad (۴)$$

۱۸۱- فرض کنید  $F$  و  $F'$  کانون‌های هذلولی  $\frac{(x-1)^2}{4} - (y+3)^2 = 1$  باشند. قدرمطلق تفاضل فواصل  $F$  و  $F'$  از  $M = (۳, -۳)$  چه قدر است؟

$$۱ \quad (۱) \quad ۲ \quad (۲) \quad ۳ \quad (۳) \quad ۴ \quad (۴)$$

۱۸۲- در هذلولی  $۴y^2 - ۵x^2 + ۸y + ۲۰x + ۴ = 0$  مختصات یکی از کانون‌ها کدام است؟ (سراسری تهرانی قاجار از کشور ۸۵)

$$(۲, -۱) \quad (۱) \quad (-۱, -۱) \quad (۲) \quad (۲, -۱) \quad (۳) \quad (۲, ۲) \quad (۴)$$

۱۸۳- هذلولی  $۹y^2 - x^2 + ۴x = ۱۳$  مفروض است. معادله‌ی دایره‌ای که  $F$  و  $F'$  دو سر قطر آن باشد، کدام است؟

$$x^2 + y^2 - ۴x = ۶ \quad (۱) \quad x^2 + y^2 + ۴x = ۸ \quad (۲) \quad x^2 + y^2 - ۴x = ۸ \quad (۳) \quad x^2 + y^2 - ۴x = ۶ \quad (۴)$$

۱۸۴- دو نقطه‌ی  $M$  و  $N$  هر کدام بر روی یکی از دو شاخه‌ی هذلولی  $۴y^2 - ۹x^2 + ۱۸x + ۱۶ = 0$  حرکت می‌کنند. کم‌ترین فاصله‌ی  $MN$  کدام است؟

$$\frac{۱۰}{۳} \quad (۱) \quad \frac{۵}{۳} \quad (۲) \quad \frac{۵}{۶} \quad (۳) \quad ۵ \quad (۴) \quad (سراسری ۸۲)$$

۱۸۵- در هذلولی  $\frac{(y-3)^2}{4} - (x-1)^2 = 1$  مجموعه مقادیر  $y$  کدام است؟

$$y \leq ۴ \text{ یا } y \geq ۱ \quad (۱) \quad y \geq ۱ \text{ یا } y \leq -۳ \quad (۲) \quad y \leq ۵ \text{ یا } y \geq ۱ \quad (۳) \quad y \geq ۶ \text{ یا } y \leq ۲ \quad (۴)$$

۱۸۶- در هذلولی  $\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x-4)^2}{9} = 1$  مساحت مستطیل هذلولی چه قدر است؟

$$۲۴ \quad (۱) \quad ۶ \quad (۲) \quad ۱۲ \quad (۳) \quad ۱۶ \quad (۴)$$

۱۸۷- رئوس مجازی هذلولی  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$  کدام است؟

$$(۰, ۳) \text{ و } (۰, ۴) \quad (۱) \quad (۰, -۳) \text{ و } (۰, ۳) \quad (۲) \quad (-۲, ۰) \text{ و } (۲, ۰) \quad (۳) \quad (-۲, ۰) \text{ و } (۰, ۰) \quad (۴)$$

۱۸۸- مساحت مستطیلی که دو ضلعش بر هذلولی مماس و قطرهای آن مجانب‌های هذلولی به معادله‌ی  $۴x^2 - y^2 + ۴y = ۸$  است، کدام است؟

$$۴ \quad (۱) \quad ۶ \quad (۲) \quad ۸ \quad (۳) \quad ۱۰ \quad (۴) \quad (سراسری تهرانی ۸۲)$$

۱۸۹- معادلات مجانب‌های هذلولی  $۴(x-1)^2 - ۹y^2 = ۳۶$  کدام است؟

$$۲x \pm ۳y = ۰ \quad (۱) \quad ۲x \pm ۳y = ۱ \quad (۲) \quad ۲x \pm ۳y = ۲ \quad (۳) \quad ۳x \pm ۲y = ۲ \quad (۴)$$

۱۹۰- اگر مرکز یک هذلولی  $\omega = (۴, ۱۰)$  باشد و  $\begin{cases} y = ۳x - ۲ \\ y = mx + h \end{cases}$  مجانب‌های آن باشند،  $m + h$  کدام است؟

$$-۳ \quad (۱) \quad ۲۵ \quad (۲) \quad ۱۹ \quad (۳) \quad ۲۲ \quad (۴)$$

۱۹۱- مجانب‌های منحنی  $۴x^2 - y^2 = ۱$  با مجانب‌های کدام منحنی یکسان است؟ (آزاد تهرانی ۸۳)

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = ۱ \quad (۱) \quad ۲x^2 - y^2 = ۱ \quad (۲) \quad \frac{x^2}{4} - y^2 = -۱ \quad (۳) \quad y^2 - ۴x^2 = ۱ \quad (۴)$$

۱۹۲- مختصات نقاط تلاقی مجانب‌های هذلولی  $x^2 - y^2 - ۲y - ۴x = 0$  کدام است؟

$$(۲, -۱) \quad (۱) \quad (-۲, ۱) \quad (۲) \quad (۲, ۱) \quad (۳) \quad (-۲, -۱) \quad (۴)$$

۱۹۳- مجانب‌های هذلولی به معادله‌ی  $\frac{1}{4}x^2 - y^2 + ax + by = 1$  در نقطه‌ی  $(-۲, ۱)$  متقاطع‌اند. عرض از مبدأ خط مجانب آن با شیب مثبت کدام است؟

$$۱ \quad (۱) \quad ۲ \quad (۲) \quad ۳ \quad (۳) \quad ۴ \quad (۴) \quad (سراسری ریاضی ۹۰)$$

۱۹۴- در هذلولی قائم که یک کانون آن  $(۲, -۱)$  و یک خط مجانب آن  $x - y = ۱$  است. مرکز تقارن کدام نقطه است؟ (آزاد تهرانی ۸۰)

$$(۲, ۱) \quad (۱) \quad (۲, ۰) \quad (۲) \quad (۲, -۱) \quad (۳) \quad (۱, -۱) \quad (۴)$$

۱۹۵- خط به معادله‌ی  $y + ۲x = ۴$  یکی از مجانب‌های هذلولی با کانون  $F = (۳, ۲)$  است که محور کانونی آن موازی محور  $x$  هاست. معادله‌ی خط

مجانب دیگر هذلولی کدام است؟ (سراسری تهرانی ۷۹)

$$y = ۲x \quad (۱) \quad y = ۲x - ۲ \quad (۲) \quad y = ۲x - ۴ \quad (۳) \quad ۲y = x + ۳ \quad (۴)$$

۱۹۶- معادله‌ی هذلولی با مجانب‌های  $\begin{cases} y-x=2 \\ y+x=2 \end{cases}$  گذرنده بر نقطه‌ی  $(-\sqrt{3}, -1)$  کدام است؟ (سراسری تهری فارج از کشور ۸۷)

$$x^2 - y^2 = 4x \quad (۴) \quad y^2 - x^2 = 4y \quad (۳) \quad y^2 - x^2 - 4y = 2 \quad (۲) \quad x^2 - y^2 - 4x = 2 \quad (۱)$$

۱۹۷- کانون‌های یک هذلولی روی خط  $y=4$  قرار دارند و خط  $3x+4y=1$  یکی از مجانب‌های هذلولی است. اگر فاصله‌ی رأس‌های این هذلولی برابر ۱۶ باشد، کدام نقطه‌ی زیر، یکی از کانون‌های هذلولی است؟

$$(۰, ۴) \quad (۴) \quad (۵, ۴) \quad (۳) \quad (-۵, ۴) \quad (۲) \quad (۱۵, ۴) \quad (۱)$$

۱۹۸- مجانب‌های یک هذلولی  $\begin{cases} 3x+4y=1 \\ 3x-4y=3 \end{cases}$  هستند؛ یکی از محورهای تقارن این هذلولی کدام است؟

$$y = -\frac{1}{4} \quad (۴) \quad y = \frac{1}{4} \quad (۳) \quad x = -\frac{1}{4} \quad (۲) \quad x = \frac{1}{4} \quad (۱)$$

۱۹۹- خط  $x=4$  محور تقارن هذلولی است؛ این خط هذلولی را قطع نمی‌کند. خط  $x=2y$  یکی از مجانب‌های هذلولی است. اگر فاصله‌ی رئوس این هذلولی برابر ۱۰ باشد، کدام خط زیر از یک کانون هذلولی عبور می‌کند؟

$$x - y = 5\sqrt{5} \quad (۴) \quad x + y = 6 + \frac{5\sqrt{5}}{2} \quad (۳) \quad x - y = 6 + \frac{5\sqrt{5}}{2} \quad (۲) \quad x + y = 5\sqrt{5} \quad (۱)$$

۲۰۰- معادله‌ی هذلولی که کانون آن  $F=(6,1)$  و معادله‌ی مجانب‌های آن  $\begin{cases} 3x-4y=-1 \\ 3x+4y=7 \end{cases}$  باشد، کدام است؟

$$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{1} = 1 \quad (۴) \quad \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1 \quad (۳) \quad \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad (۲) \quad \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1 \quad (۱)$$

۲۰۱- فاصله‌ی کانون هذلولی  $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$  از مجانب این منحنی چه قدر است؟ (آزاد ۸۸)

$$۱ \quad (۴) \quad ۴ \quad (۳) \quad ۸ \quad (۲) \quad ۲ \quad (۱)$$

۲۰۲- فاصله‌ی کانون هذلولی  $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{y^2}{k} = 1$  از مجانب آن برابر  $2k-6$  است؛ مقدار  $k$  کدام است؟

$$۵ \quad (۴) \quad ۱۴ \quad (۳) \quad ۴ \quad (۲) \quad \frac{9}{4} \quad (۱)$$

۲۰۳- حاصل ضرب فواصل هر نقطه واقع بر هذلولی  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} = 1$  از مجانب‌ها چه قدر است؟

$$۲۵ \quad (۴) \quad ۲۰ \quad (۳) \quad ۳۰ \quad (۲) \quad ۳۵ \quad (۱)$$

۲۰۴- در هذلولی  $\frac{x^2}{3} + \frac{(y-1)^2}{-1} = -1$  زاویه‌ی بین دو مجانب چه قدر است؟

$$۹۰^\circ \quad (۴) \quad ۴۵^\circ \quad (۳) \quad ۶۰^\circ \quad (۲) \quad ۳۰^\circ \quad (۱)$$

۲۰۵- یکی از مجانب‌های هذلولی  $3y-2x=1$  است. اگر  $\alpha$  زاویه‌ی بین دو مجانب هذلولی باشد،  $\cot \alpha$  کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (۴) \quad \frac{3}{2} \quad (۳) \quad \frac{2}{3} \quad (۲) \quad \frac{5}{12} \quad (۱)$$

۲۰۶- مقطع مخروطی  $\frac{(2x+1)^2}{9} - \frac{(3y-1)^2}{16} = -1$  : (آزاد ۸۹)

$$\frac{\sqrt{145}}{8} \quad (۲) \quad \text{هذلولی قائم با خروج از مرکز} \quad (۱) \quad \frac{\sqrt{145}}{9} \quad (۳) \quad \text{هذلولی قائم با خروج از مرکز} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{145}}{9} \quad (۴) \quad \text{هذلولی افقی با خروج از مرکز} \quad (۳) \quad \frac{\sqrt{145}}{8} \quad (۲) \quad \text{هذلولی قائم با خروج از مرکز} \quad (۱)$$

۲۰۷- اگر  $F=(0,3)$  و  $F'=(0,-3)$  کانون‌های یک هذلولی با خروج از مرکز  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$  باشند، معادله‌ی آن کدام است؟ (سراسری تهری ۸۵)

$$y^2 - 8x^2 = 8 \quad (۴) \quad x^2 - 8y^2 = 8 \quad (۳) \quad x^2 - 3y^2 = 4 \quad (۲) \quad y^2 - 3x^2 = 4 \quad (۱)$$

۲۰۸- اگر خروج از مرکز یک هذلولی برابر  $e=3$  باشد، زاویه‌ی بین دو مجانب کدام یک از گزینه‌های زیر نمی‌تواند باشد؟

$$2 \cot^{-1} \sqrt{6} \quad (۴) \quad 2 \tan^{-1} \sqrt{8} \quad (۳) \quad 2 \cos^{-1} \frac{1}{3} \quad (۲) \quad 2 \sin^{-1} \frac{1}{3} \quad (۱)$$

۲۰۹- مجانب‌های یک هذلولی منطبق بر دو قطر یک مستطیل با ابعاد ۶ و ۸ واحد است. اگر این هذلولی بر ضلع بزرگ‌تر مستطیل مماس باشد، خروج از مرکز آن کدام است؟ (سراسری تهری ۸۳)

$$\frac{5}{3} \quad (۴) \quad \frac{3}{2} \quad (۳) \quad \frac{4}{3} \quad (۲) \quad \frac{5}{21} \quad (۱)$$

۲۱۰- معادله‌ی هذلولی که کانون آن  $F = (3, -2)$  و  $\omega = (-2, -2)$  مرکز آن و خروج از مرکز آن برابر  $\frac{5}{3}$  باشد، کدام است؟

$$9(y+2)^2 - 16(x+2)^2 = 144 \quad (2) \qquad 16(x+2)^2 - 9(y+2)^2 = 144 \quad (1)$$

$$9(x+2)^2 - 16(y+2)^2 = 144 \quad (4) \qquad 16(y+2)^2 - 9(x+2)^2 = 144 \quad (3)$$

۲۱۱- اگر کانون‌های هذلولی  $F = (4, 8)$  و  $F' = (4, -1)$  باشند و نقطه‌ی  $M = (1, 3)$  روی هذلولی باشد، خروج از مرکز هذلولی کدام است؟

$$\sqrt{33} + 5 \quad (2) \qquad \sqrt{34} + 5 \quad (3) \qquad \sqrt{35} + 5 \quad (1) \qquad \sqrt{32} + 5 \quad (4)$$

۲۱۲- اگر در یک هذلولی رأس وسط مرکز تقارن و کانون واقع شود، خروج از مرکز چه قدر است؟

$$1 \quad (4) \qquad 3 \quad (3) \qquad 4 \quad (2) \qquad 2 \quad (1)$$

۲۱۳- اگر خروج از مرکز مقطع مخروطی  $\frac{x^2}{-2m-1} - \frac{y^2}{3m-2} = 1$  بزرگ‌تر از یک باشد، حدود  $m$  کدام است؟

$$-\frac{1}{2} < m < \frac{2}{3} \quad (4) \qquad m > \frac{1}{5} \quad (3) \qquad m > \frac{2}{3} \quad (2) \qquad m > \frac{2}{3} \text{ یا } m < -\frac{1}{2} \quad (1)$$

۲۱۴- اندازه‌ی وتر کانونی در هذلولی  $4(x-1)^2 - (y+3)^2 = 16$  کدام است؟

$$46 \quad (4) \qquad 32 \quad (3) \qquad 16 \quad (2) \qquad 8 \quad (1)$$

۲۱۵- در یک هذلولی وترهای کانونی  $M'N'$  و  $MN$  است. اگر مساحت مستطیل  $M'NMN'$ ،  $2\sqrt{3}$  برابر مساحت مستطیل هذلولی باشد، خروج از مرکز کدام است؟

$$2 \quad (4) \qquad \sqrt{7} \quad (3) \qquad \sqrt{5} \quad (2) \qquad \sqrt{3} \quad (1)$$

۲۱۶- هذلولی  $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{4} = 1$  با خروج از مرکز  $e$  مفروض است. اندازه‌ی وتر کانونی این هذلولی کدام است؟

$$4\sqrt{e^2-1} \quad (4) \qquad 3\sqrt{e^2-1} \quad (3) \qquad 2\sqrt{e^2-1} \quad (2) \qquad \sqrt{e^2-1} \quad (1)$$

### مدل گسترده‌ی هذلولی

۲۱۷- نوع مقطع مخروطی  $9x^2 - 4y^2 + 18x + 16y - 7 = 0$  کدام است؟

$$\text{هذلولی} \quad (1) \qquad \text{بیضی} \quad (2) \qquad \text{نقطه} \quad (3) \qquad \text{دو خط متقاطع} \quad (4)$$

۲۱۸- اگر مقطع مخروطی  $x^2 - 5y^2 + 4x + m = 4$  هذلولی باشد، حدود  $m$  کدام است؟

$$m \geq 8 \quad (2) \qquad m < 8 \quad (3) \qquad m \neq 8 \quad (4) \qquad m = 8 \quad (1)$$

(آزار پزشکی ۸۵)

۲۱۹- مرکز تقارن منحنی  $x^2 - y^2 + 2x + 2y = 0$  کدام نقطه است؟

$$(-1, 0) \quad (1) \qquad (1, -1) \quad (2) \qquad (0, 1) \quad (3) \qquad (-1, 1) \quad (4)$$

۲۲۰- نوع مقطع مخروطی  $x^2 - 4y^2 + 4x - 8y + 1 = 0$  کدام است؟

$$\text{هذلولی قائم} \quad (1) \qquad \text{هذلولی افقی} \quad (2) \qquad \text{دو خط متقاطع} \quad (3) \qquad \text{دو خط عمود برهم} \quad (4)$$

۲۲۱- هر دو کانون هذلولی به معادله‌ی  $ax^2 + 4x + y^2 - 2y = 0$  بر روی خطی موازی محور  $x$  هاست. مجموعه مقادیر  $a$  به کدام صورت است؟

$$-8 < a < -4 \quad (1) \qquad -4 < a < 0 \quad (2) \qquad -2 < a < 0 \quad (3) \qquad 0 < a < 8 \quad (4) \quad (\text{سراسری ۸۵})$$

۲۲۲- هر یک از دو شاخه‌ی هذلولی به معادله‌ی  $x^2 + ax - 4y^2 + 4 = 0$ ، محور  $y$  ها را در یک نقطه قطع می‌کند. مجموعه مقادیر  $a$  به کدام صورت است؟

$$|a| < 2 \quad (1) \qquad |a| > 2 \quad (2) \qquad |a| < 4 \quad (3) \qquad |a| > 4 \quad (4) \quad (\text{سراسری قارج از کشور ۸۷})$$

۲۲۳- فاصله‌ی بین رئوس کانونی و نوع هذلولی  $x^2 - y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$  کدام است؟

$$4, \text{ افقی} \quad (1) \qquad 4, \text{ قائم} \quad (2) \qquad 5, \text{ افقی} \quad (3) \qquad 5, \text{ قائم} \quad (4)$$

### وضع نقطه و هذلولی

۲۲۴- نقطه‌ی  $M = (3, -1)$  نسبت به هذلولی  $(x+3y-6)(x-2y) = 8$  چگونه است؟

$$\text{خارج هذلولی است.} \quad (1) \qquad \text{داخل هذلولی است.} \quad (2) \qquad \text{یک رأس کانونی است.} \quad (3) \qquad \text{روی هذلولی است ولی یک رأس آن نیست.} \quad (4)$$

۲۲۵- از نقطه‌ی  $A = (1, 2)$  چند مماس بر هذلولی  $x^2 - 4y^2 - 2x + 16y = 17$  رسم می‌شود؟

- (۱) هیچ (۲) چهار (۳) دو (۴) بی‌شمار

۲۲۶- اگر نقطه‌ی  $M = (1, -1)$  داخل هذلولی  $4x^2 - y^2 - 8x + k = 0$  قرار گیرد، حدود  $k$  کدام است؟

- (۱)  $4 < k < 5$  (۲)  $0 < k < 4$  (۳)  $k > 5$  (۴)  $k < 4$

### وضع نسبی خط و هذلولی

۲۲۷- خط  $x + y = 2$  هذلولی  $x^2 - 4y^2 - 6x + 8 = 0$  را در دو نقطه‌ی  $A$  و  $B$  قطع می‌کند. فاصله‌ی مبدأ مختصات تا وسط پاره‌خط  $AB$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}\sqrt{23}$  (۲)  $\frac{1}{3}\sqrt{23}$  (۳)  $\frac{1}{3}\sqrt{26}$  (۴)  $\frac{1}{3}\sqrt{26}$

۲۲۸- اگر خط  $2x - y = 3$  بر هذلولی  $y^2 - x^2 + 4x = m$  مماس باشد، مقدار  $m$  چه قدر است؟

- (۱)  $\frac{2}{11}$  (۲)  $\frac{11}{3}$  (۳)  $\frac{4}{11}$  (۴)  $\frac{2}{11}$

۲۲۹- دو خط  $y = 4$  و  $y = -4$  هذلولی  $\frac{(x-1)^2}{4} - y^2 = 1$  را در چهار نقطه قطع می‌کنند. مساحت چهارضلعی حاصل از اتصال این چهار نقطه چه قدر است؟

- (۱)  $32\sqrt{17}$  (۲)  $16\sqrt{17}$  (۳)  $17\sqrt{32}$  (۴)  $17\sqrt{15}$

### وضع نسبی دایره و هذلولی هم‌مرکز

۲۳۰- وضع نسبی دو مقطع  $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - (y+1)^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + 2y = 8 \end{cases}$  چگونه است؟

- (۱) در دو نقطه مشترک‌اند. (۲) در چهار نقطه مشترک‌اند. (۳) در سه نقطه مشترک‌اند. (۴) نقطه‌ی مشترکی ندارند.

۲۳۱- اگر دایره‌ی  $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$  بر هذلولی  $4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y = 5 + k$  مماس باشد، مقدار  $k$  چه قدر است؟ ( $k > 0$ )

- (۱)  $k = 16$  (۲)  $k = 36$  (۳)  $k = 4$  (۴)  $k = 9$

### وضع نسبی بیضی و هذلولی هم‌مرکز

۲۳۲- بیضی  $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$  بر کدام هذلولی مماس است؟

- (۱)  $\frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$  (۲)  $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$  (۳)  $(x-1)^2 - (y-2)^2 = 1$  (۴) هیچ‌کدام

(آزاد ۸۳)

## معادله و تعریف هذلولی

۱۷۹- گزینه‌ی «۲»

مکان هندسی نقاطی در صفحه که قدرمطلق تفاضل فواصل آن‌ها از دو نقطه‌ی ثابت به نام کانون مقداری ثابت باشد، را هذلولی می‌نامیم. حالا ساده‌تر بگم: فرض کنید  $F$  و  $F'$  دو تا نقطه‌ی ثابت باشن؛ نقطه‌ای مثل  $M$  را در نظر بگیرید. حالا فاصله‌های  $|MF|$  و  $|MF'|$  را حساب کنید بعد این‌ها رو از هم کم کنید و قدرمطلق بگیرید  $||MF| - |MF'|$ . حالا اگه این عدد برابر یه مقدار ثابتی باشه، اون وقت نقطه‌ی  $M$  روی یه شکلی حرکت می‌کنه که بهش میگن هذلولی. البته توجه کن که  $||MF| - |MF'|$  برابر یا بیشتر از  $|FF'|$  نشه. پس  $F$  و  $F'$  کانون‌های هذلولی‌اند و اون مقدار ثابت برابر  $|AA'|$  است.

## معادله‌ی هذلولی افقی

اگه مرکز هذلولی افقی  $\omega = (\alpha, \beta)$  فرض بشه، اون وقت:

محور تقارن هذلولی

خب حالا وقتش رسیده که معادله‌ی هذلولی افقی را بگیم.

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

معادله‌ی هذلولی افقی

رئوس کانونی:  $A = (\alpha + a, \beta)$  ,  $A' = (\alpha - a, \beta)$

کانون‌ها:  $F = (\alpha + c, \beta)$  ,  $F' = (\alpha - c, \beta)$

• تو هذلولی (مثل بیضی) مرکز تقارن  $(\omega)$  همیشه وسط  $FF'$  و هم‌چنین وسط  $AA'$  قرار داره.

• تو هذلولی افقی پنج نقطه‌ی  $F, A, F', A'$  و  $\omega$  روی یک خط راست قرار دارن که این خط موازی محور  $x$  هاست؛ یعنی عرض این پنج نقطه همه برابره  $\beta$  است.

• تو هذلولی افقی محور کانونی (همون محوری که کانون‌های  $F$  و  $F'$  و رأس‌های  $A$  و  $A'$  روی اون قرار دارن) موازی محور  $x$  هاست.

پس میشه گفت که هذلولی افقی، هذلولیه که محور کانونیش موازی محور  $x$  هاست.

• تو این هذلولی افقی  $a^2$  عددی است که تو معادله‌ی هذلولی مخرج کسری است که ضریب مثبت داره (البته باید سمت راست عدد یک باشه)

• تو هذلولی  $a^2$  و  $b^2$  برتری ندارن؛ می‌تونن هر حالتی داشته باشن.

• تو هذلولی  $|FF'| = 2c$  را فاصله‌ی کانونی می‌نامیم.

• رابطه‌ی مهم تو هذلولی بین  $a, b$  و  $c$ ،  $c^2 = a^2 + b^2$  است.

تو این سؤال کانون‌ها  $F = (4, 5)$  و  $F' = (-4, 5)$  است پس:

$$\omega = \frac{1}{2}(F + F') = \frac{(4, 5) + (-4, 5)}{2} = (0, 5)$$

ضمناً مقدار ثابت هذلولی  $2a = 4$  است؛ پس  $a = 2$ . از طرفی فاصله‌ی  $|FF'| = 8$  میشه  $2c = 8$

حالا  $a$  و  $c$  را داریم می‌ریم که  $b$  را حساب کنیم:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16 = 4 + b^2 \Rightarrow b^2 = 12$$

معادله‌ی هذلولی افقی:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-0)^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{12} = 1$$

دقت کن که هذلولی  $\frac{x^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ ، هذلولی افقیه؛ چون ضریب  $x^2$  مثبت و ضریب  $y^2$  منفیه؛ ضمناً سمت راست

۱۸۰- گزینه‌ی «۱»

تساوی‌مون عدد یکه.

$$\begin{cases} \frac{(x-0)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1 \\ \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -1 \\ a^2 = 4 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = (0, -1) \\ a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

رئوس کانونی:  $A = (\alpha + a, \beta)$  ,  $A' = (\alpha - a, \beta) \Rightarrow A = (2, -1)$  ,  $A' = (-2, -1)$

$$M = (3, -3) \quad , \quad \frac{(x-1)^2}{4} - (y+3)^2 = 1$$

۱۸۱- گزینه‌ی «۴»

پس  $M$  تو معادله‌ی هذلولی صدق کرد.  $\frac{(3-1)^2}{4} - (-3+3)^2 = 1 \Rightarrow 1 = 1$  امتحان نقطه

پس نقطه‌ی  $M$  روی هذلولی قرار داره. چون  $M$  روی هذلولی قرار داره، پس طبق تعریف هذلولی قدرمطلق تفاضل فواصل  $M$  از دو کانون همیشه

$$\frac{(x-1)^2}{4} - (y+3)^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 2a = 4$$

برابر  $(2a)$  میشه. پس تو این مسئله  $2a$  خواسته شده:

## هذلولی گسترده

۱۸۲- گزینه‌ی «۲»

اگه هذلولی به صورت ضمنی (گسترده) بیان بشه، اول اون رو مربع کامل می‌کنیم (مثل بقیه‌ی مقطع‌هایی که گفتیم) بعد به صورت استاندارد تبدیل می‌کنیم.

البته روش‌های بهتری بعداً خواهیم گفت.

این سؤال رو تشریحی حل می‌کنیم. تو سؤالای بعدی که هذلولی گسترده گفته شد، اون وقت روش‌های دیگه‌ای واسه حل این جور سؤال‌ها ارائه

می‌دیم. پس هذلولی رو استاندارد می‌کنیم. البته واسه اونایی که اتحاد یادشون رفته، یادآوری می‌کنیم که  $x^2 \pm ax = (x \pm \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4}$ .

$$4y^2 - 5x^2 + 8y + 20x + 4 = 0 \Rightarrow (4y^2 + 8y) + (-5x^2 + 20x) + 4 = 0 \Rightarrow 4(y^2 + 2y) - 5(x^2 - 4x) + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 4[(y+1)^2 - 1] - 5[(x-2)^2 - 4] + 4 = 0$$

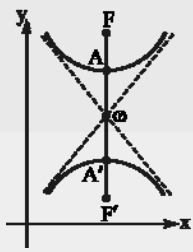
$$\Rightarrow 4(y+1)^2 - 4 - 5(x-2)^2 + 20 + 4 = 0 \Rightarrow 5(x-2)^2 - 4(y+1)^2 = 20 \xrightarrow{\div 20} \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{5} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2, \beta = -1 \\ a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \\ b^2 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5} \end{cases}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9 \Rightarrow c = 3$$

$$F = (\alpha + c, \beta), F' = (\alpha - c, \beta) \Rightarrow F = (5, -1), F' = (-1, -1)$$

## هذلولی قائم

۱۸۳- گزینه‌ی «۴»



$$F = (\alpha, \beta + c)$$

$$A = (\alpha, \beta + a)$$

$$\omega = (\alpha, \beta)$$

$$A' = (\alpha, \beta - a)$$

$$F' = (\alpha, \beta - c)$$

$$\text{معادله‌ی هذلولی قائم: } \frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$$

تو هذلولی قائم محور کانونی موازی محور  $y$  هاست.

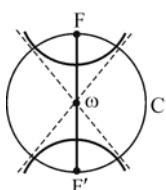
همه‌ی روابط طولی متناظر با هذلولی قائم و افقی یکسان‌اند مثلاً تو هذلولی همیشه  $c^2 = a^2 + b^2$

$$9y^2 - x^2 + 4x = 13 \Rightarrow 9y^2 - (x^2 - 4x) = 13 \Rightarrow 9y^2 - [(x-2)^2 - 4] = 13 \Rightarrow 9y^2 - (x-2)^2 + 4 = 13 \Rightarrow 9y^2 - (x-2)^2 = 9$$

$$\xrightarrow{\div 9} \frac{y^2}{1} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1$$

$$\begin{cases} \frac{y^2}{1} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1 \\ \frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = (2, 0) \\ a^2 = 1 \\ b^2 = 9 \end{cases}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 1 + 9 = 10$$

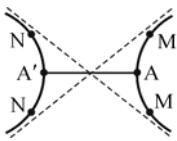


مرکز دایره‌ای که  $FF'$  قطرش باشه، همون  $\omega$  و شعاع این دایره برابر  $r = c$  خواهد بود؛ می‌تونید تو شکل روبه‌رو رؤیت کنید:

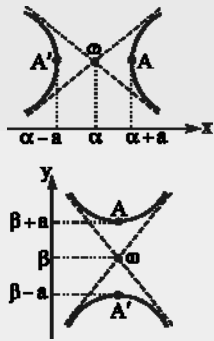
$$C: (x-2)^2 + (y-0)^2 = 10 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x = 6$$

**۱۸۴- گزینه‌ی «۱»**

اگر دو نقطه‌ی  $M$  و  $N$  هر کدام روی یک شاخه هذلولی قرار بگیرند و حرکت کنند، واضح است که وقتی فاصله‌شان کم‌ترین مقدار را داشته باشد، آن فاصله برابر با  $|AA'|$  است. پس تو این سؤال مقدار  $(2a)$  خواسته‌ی مسئله است.



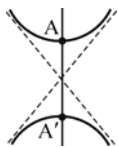
$$\begin{aligned} 4y^2 - 9x^2 + 18x + 16 &= 0 \Rightarrow 4y^2 - 9(x^2 - 2x) + 16 = 0 \Rightarrow 4y^2 - 9[(x-1)^2 - 1] + 16 = 0 \\ \Rightarrow 4y^2 - 9(x-1)^2 + 25 &= 0 \Rightarrow 9(x-1)^2 - 4y^2 = 25 \xrightarrow{+25} \frac{(x-1)^2}{\frac{25}{9}} - \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1 \\ \Rightarrow a^2 &= \frac{25}{9} \Rightarrow a = \frac{5}{3} \Rightarrow 2a = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

**محدوده‌های هذلولی**
**۱۸۵- گزینه‌ی «۳»**


اگر هذلولی افقی باشد، محدوده‌ی  $x$  های آن بازه‌ی  $(-\infty, \alpha - a] \cup [\alpha + a, +\infty)$  و محدوده‌ی  $y$  های آن  $\mathbb{R}$  است. (در هر هذلولی افقی، هر شاخه‌ی هذلولی محور  $x$  ها رو در یک نقطه قطع می‌کند.)

اگر هذلولی قائم باشد، محدوده‌ی  $y$  های آن  $(-\infty, \beta - a] \cup [\beta + a, +\infty)$  و محدوده‌ی  $x$  های آن  $\mathbb{R}$  است. (در هذلولی قائم، هر شاخه‌ی هذلولی محور  $y$  ها رو در یک نقطه قطع می‌کند.)

هذلولی  $\frac{(y-3)^2}{4} - (x-1)^2 = 1$  قائم است؛ پس شکل تقریبی آن به صورت زیر است:



چون مختصات رئوس کانونی تو هذلولی قائم  $A = (\alpha, \beta + a)$  و  $A' = (\alpha, \beta - a)$  است، پس محدوده‌ی  $y$  ها بازه‌ی  $(-\infty, \beta - a] \cup [\beta + a, +\infty)$  خواهد بود.

$$\frac{(y-3)^2}{4} - (x-1)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1, \beta = 3 \\ a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \\ b^2 = 1 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

محدوده‌ی  $y$  ها  $(-\infty, 3-2] \cup [3+2, +\infty) = (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$

**مستطیل هذلولی - (رأس‌های مجازی)**
**۱۸۶- گزینه‌ی «۱»**

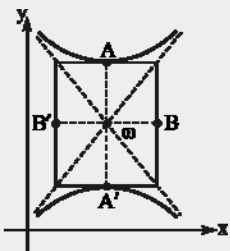
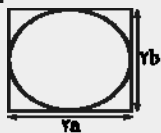
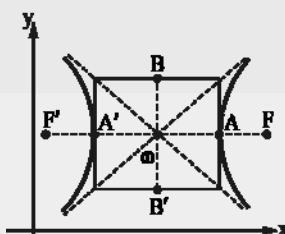
به شکل روبه‌رو توجه کنید:

در نقطه‌های  $A$  و  $A'$  دو پاره‌خط مماس بر هذلولی رسم میشه که به مجانب‌ها محدودند؛ اگر از وسط مستطیل که مرکز هذلولی باشه، به اندازه‌ی  $b$  واحد به بالا و پایین حرکت کنیم، نقطه‌های  $B$  و  $B'$  به دست میان پس:

$$S = (2a)(2b) = 4ab$$

$$\sqrt{(2a)^2 + (2b)^2} = \sqrt{4(a^2 + b^2)} = \sqrt{4c^2} = 2c$$

$$B = (\alpha, \beta + b) \quad , \quad B' = (\alpha, \beta - b)$$



**الف** مساحت مستطیل هذلولی:

**ب** قطر مستطیل:

**ج** رئوس مجازی:

**د** قطرهای مستطیل مجانب‌های هذلولی‌اند.

**ه** یه همچین مستطیلی تو بیضی هم هست.

توجه کن که در حالت هذلولی قائم نیز همین‌طور عمل می‌کنیم.

در هذلولی قائم رئوس مجازی  $B = (\alpha + b, \beta)$  و  $B' = (\alpha - b, \beta)$  است.

$$\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x-4)^2}{9} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 4 \\ 2b = 6 \end{cases}$$

$$S_{\text{مستطیل}} = (2a)(2b) = 4 \times 6 = 24$$

۱۸۷- گزینه‌ی «۲» با توجه به توضیحاتی که تو مسئله‌ی قبل دادیم، تو هذلولی افقی رئوس مجازی  $B = (\alpha, \beta + b)$  و  $B' = (\alpha, \beta - b)$  است.

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta = 0 \\ a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow B = (0, 3), B' = (0, -3)$$

۱۸۸- گزینه‌ی «۳» منظور این سؤال مساحت مستطیل هذلولیه  $4x^2 - y^2 + 4y = 8$  است که مقدارش برابر  $4ab$  است.

$$4x^2 - (y^2 - 4y) = 8 \Rightarrow 4x^2 - [(y-2)^2 - 4] = 8 \Rightarrow 4x^2 - (y-2)^2 = 4 \xrightarrow{\div 4} \frac{x^2}{1} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \\ b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

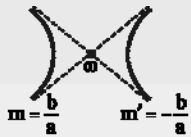
$$\Rightarrow S = 4ab = 4 \times 1 \times 2 = 8$$

### مجانب‌های هذلولی

۱۸۹- گزینه‌ی «۳»

باید تا حالا متوجه شده باشی که هر هذلولی دو مجانب داره؛ می‌خواهیم معادله‌ی اون‌ها رو بگیریم:

الف) هذلولی افقی:  $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$  مجانب‌ها:  $\frac{x-\alpha}{a} \pm \frac{y-\beta}{b} = 0$

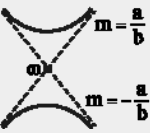


اگر دقت کنی، توان ۲ها حذف شده و به جای  $(-)$ ،  $(+)$  گذاشته شده و به جای  $(1)$ ، صفر قرار داده شده؛ اگر این معادله مرتب بشه:

$$y - \beta = \pm \frac{b}{a}(x - \alpha)$$

یعنی شیب مجانب‌های هذلولی افقی  $\pm \frac{b}{a}$  و  $\omega = (\alpha, \beta)$  توش صدق می‌کنه.

ب) هذلولی قائم:  $\frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$  مجانب‌ها:  $\frac{y-\beta}{a} \pm \frac{x-\alpha}{b} = 0$



$$y - \beta = \pm \frac{a}{b}(x - \alpha)$$

خلاصه‌شده‌ی مجانب‌ها در هذلولی قائم:

● یعنی شیب مجانب‌های هذلولی قائم برابر  $\pm \frac{a}{b}$  و  $\omega = (\alpha, \beta)$  تو معادله‌ی مجانب‌ها صدق می‌کنه.

$$4(x-1)^2 - 9y^2 = 36 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \text{مجانب‌ها: } \frac{x-1}{3} \pm \frac{y}{2} = 0 \Rightarrow 2(x-1) = \pm 3y \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$$

۱۹۰- گزینه‌ی «۳» شیب دوتا مجانب هذلولی همیشه قرینه‌ی یکدیگره و ضمناً محل برخورد دو مجانب هذلولی همون مرکز (مرکز تقارن) هذلولی حساب میشه. نقطه‌ی  $\omega = (4, 10)$  روی مجانب‌ها قرار داره.

$$y = 3x - 2 \Rightarrow m' = 3 \Rightarrow m = -3 \Rightarrow y = -3x + h \quad \text{حالا باید مرکز هذلولی } \omega = (4, 10) \text{ رو این خط قرار بگیره:}$$

$$(4, 10) \in (y = -3x + h) \Rightarrow 10 = -12 + h \Rightarrow h = 22 \Rightarrow m + h = 19$$

۱۹۱- گزینه‌ی «۴» معادله‌ی مجانب‌های هذلولی  $4x^2 - y^2 = 1$ ،  $2x \pm y = 0$  است، حالا تک‌تک گزینه‌ها رو امتحان می‌کنیم و مجانب‌هاشون رو حساب می‌کنیم.

۱)  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \Rightarrow$  مجانب‌ها:  $\frac{x}{2} \pm y = 0 \Rightarrow x \pm 2y = 0$

۲)  $2x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow$  مجانب‌ها:  $x\sqrt{2} \pm y = 0$

۳)  $\frac{x^2}{4} - y^2 = -1 \Rightarrow y^2 - \frac{x^2}{4} = 1 \Rightarrow$  مجانب‌ها:  $y \pm \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow 2y \pm x = 0$

۴)  $y^2 - 4x^2 = 1 \Rightarrow$  مجانب‌ها:  $y \pm 2x = 0$

۱۹۲- گزینه‌ی «۱» گفتیم که محل برخورد مجانب‌های هذلولی همون مرکز تقارن هذلولیه؛ پس تو این سؤال کافی‌ه مرکز تقارن محاسبه بشه.

$$x^2 - y^2 - 2y - 4x = 0 \Rightarrow (x^2 - 4x) - (y^2 + 2y) = 0 \Rightarrow (x-2)^2 - 4 - [(y+1)^2 - 1] = 0 \Rightarrow (x-2)^2 - (y+1)^2 = 3$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{3} - \frac{(y+1)^2}{3} = 1 \Rightarrow \omega = (2, -1)$$



$$\left(\frac{1}{4}x^2 + ax\right) - (y^2 - by) = 1 \Rightarrow \frac{1}{4}(x^2 + 4ax) - (y^2 - by) = 1 \Rightarrow \frac{1}{4}[(x+2a)^2 - 4a^2] - [(y-\frac{b}{2})^2 - \frac{b^2}{4}] = 1 \quad \star$$

**۱۹۳- گزینهی «۲»**

$$\begin{cases} x+2a=0 \xrightarrow{x=-2} -2+2a=0 \Rightarrow a=1 \\ y-\frac{b}{2}=0 \xrightarrow{y=1} 1-\frac{b}{2}=0 \Rightarrow b=2 \end{cases}$$

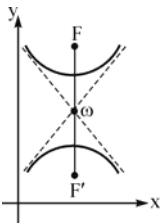
 ریشه‌های داخل پرانتزهای مربع کامل همون  $\alpha$  و  $\beta$  هستند.

$$\frac{1}{4}[(x+2)^2 - 4] - [(y-1)^2 - 1] = 1 \Rightarrow \frac{1}{4}(x+2)^2 - 1 - (y-1)^2 + 1 = 1$$

 معادله‌ی  $\star$  به کمک  $a=1$  و  $b=2$  به صورت زیر خلاصه میشه:

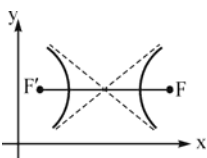
$$\frac{(x+2)^2}{4} - (y-1)^2 = 1 \Rightarrow \text{مجانب‌ها: } \frac{x+2}{2} \pm (y-1) = 0 \Rightarrow x+2 = \pm 2(y-1)$$

$$\begin{cases} x+2=2y-2 \\ x+2=2-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=-4 \\ x+2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x+2 \\ y=-\frac{x}{2} \end{cases}$$

 شیب مجانب  $y = \frac{1}{2}x + 2$  برابر  $\frac{1}{2}$  و مثبت‌ه که عرض از مبدأش برابر ۲ است.

**۱۹۴- گزینهی «۱»** چون هذلولی قائمه، پس طول کانون‌ها برابر (۲) است. یعنی  $\alpha=2$ . از طرفی مرکز تقارن

 هذلولی روی مجانب قرار می‌گیره؛ پس کافی‌ه که تو مجانب  $(x-y=1)$  به جای  $x$  عدد ۲ قرار بدیم:

$$2-y=1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow \beta=1 \Rightarrow \omega=(2,1)$$


 چون محور کانونی موازی محور  $x$  هاست، پس هذلولی افقی‌ه.

**۱۹۵- گزینهی «۱»**

 یعنی عرض نقاط  $F, F', A, A'$  و همگی برابر  $\beta$  هستند؛ پس  $\beta=2$ . مرکز تقارن هذلولی روی خط مجانب قرار

$$y+2x=4 \xrightarrow{y=2} 2+2x=4 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \alpha=1 \Rightarrow \omega=(1,2)$$

داره پس:

 شیب مجانب‌ها قرینه‌ی یکدیگرند؛ پس مجانب دیگه شیب  $m=2$  داره. حالا دیگه می‌تونیم معادله‌ی مجانب دیگه رو

$$y-2=2(x-1) \Rightarrow y-2x=0 \Rightarrow y=2x$$

بنویسیم:

**معادله‌ی هذلولی به کمک مجانب‌ها**
**۱۹۶- گزینهی «۲»**

 اگه معادله‌ی دو مجانب هذلولی به صورت  $\begin{cases} ax+by+h=0 \\ ax-by+h'=0 \end{cases}$  باشه، اون وقت معادله‌ی هذلولی به صورت  $(ax+by+h)(ax-by+h')=k$  میشه

 که با یه اطلاعات دیگه مقدار  $k$  به دست میاد.

 تو این سؤال مجانب‌ها  $\begin{cases} y-x-2=0 \\ y+x-2=0 \end{cases}$  است؛ پس معادله‌ی هذلولی به صورت  $(y-x-2)(y+x-2)=k$  پس:

$$(y-x-2)(y+x-2)=k \Rightarrow (y-2)^2 - x^2 = k \quad \star$$

$$(\sqrt{3}, -1) \in \star \Rightarrow (-1-2)^2 - (\sqrt{3})^2 = k \Rightarrow k=9-3=6$$

$$(y-2)^2 - x^2 = 6 \Rightarrow y^2 - x^2 - 4y = 2$$

**۱۹۷- گزینهی «۳»**

چون کانون‌ها روی خط  $y=4$  قرار دارند، پس هذلولی افقی و  $\beta=4$  است.

$$3x + 4y = 1 \xrightarrow{y=4} 3x + 16 = 1 \Rightarrow x = -5 \Rightarrow \omega = (-5, 4)$$

تو هذلولی افقی معادلات مجانب‌ها  $y - \beta = \pm \frac{b}{a}(x - \alpha)$  و شیب مجانب‌ها  $\pm \frac{b}{a}$  است.  $\star$   $m = -\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$  مجانب:  $3x + 4y = 1$

$$2a = 16 \Rightarrow a = 8 \xrightarrow{\star} \frac{b}{a} = \frac{3}{4} \Rightarrow b = 6$$

از طرفی تو مسئله گفته که فاصله‌ی رأس‌ها برابر ۱۶ است پس:

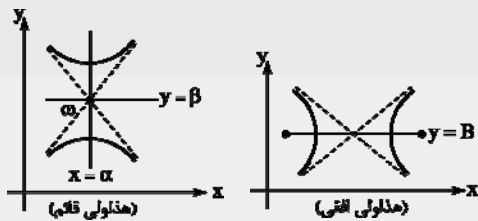
$$c^2 = a^2 + b^2 = 64 + 36 = 100 \Rightarrow c = 10$$

$$(-5 \pm 10, 4) \Rightarrow \begin{cases} F = (-15, 4) \\ F' = (5, 4) \end{cases}$$

تو هذلولی افقی کانون‌ها  $(\alpha \pm c, \beta)$  است؛ پس کانون‌ها:

**معمورهای تقارن هذلولی**
**۱۹۸- گزینهی «۴»**

هر هذلولی قائم یا افقی دوتا محور تقارن دارد.



یه کمی به شکل‌های بالا دقت کن. تو هذلولی افقی محور افقی  $y = \beta$  هذلولی رو قطع می‌کنه و  $x = \alpha$  قطع نمی‌کنه؛ ولی تو هذلولی قائم برعکسه. خط  $y = \beta$  هذلولی رو قطع نمی‌کنه و  $x = \alpha$  هذلولی رو تو دو نقطه قطع می‌کنه.

مجانب‌های هذلولی  $\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 3x - 4y = 3 \end{cases}$  است؛ پس محل برخوردشون رو پیدا می‌کنیم تا  $\omega$  به دست بیاد:  $\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 3x - 4y = 3 \end{cases} \xrightarrow{+} 6x = 4 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

$$3x + 4y = 1 \xrightarrow{x=\frac{2}{3}} 3 \times \frac{2}{3} + 4y = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}$$

پس مرکز تقارن  $\omega = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{4})$  و دوتا محور تقارن  $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases}$  است.

**۱۹۹- گزینهی «۳»**

خط  $x=4$  محور تقارن هذلولی است؛ پس  $\alpha=4$  و چون  $x=\alpha$  هذلولی را قطع نمی‌کنه، پس هذلولی افقیه و در

$$x = 4 \xrightarrow{x=2y} 4 = 2y \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \beta = 2 \Rightarrow \omega = (4, 2)$$

هذلولی افقی عرض پنج نقطه‌ی  $F, F', A, A'$  و  $\omega$  برابر:

$$2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

در هذلولی فاصله‌ی رئوس برابر  $2a$  است پس:

$$y = \frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \xrightarrow{a=5} b = \frac{5}{2}$$

همون‌طور که گفتیم، شیب‌های مجانب در هذلولی افقی  $\pm \frac{b}{a}$  است:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 25 + \frac{25}{4} = \frac{125}{4} \Rightarrow c = \frac{5}{2}\sqrt{5}$$

کانون‌ها در هذلولی افقی  $(\alpha \pm c, \beta)$  است؛ پس کانون‌ها همیشه  $F = (4 \pm \frac{5\sqrt{5}}{2}, 2)$ . اگه گزینه‌ها امتحان بشه، یکی از کانون‌ها رو خط

$$x + y = 6 + \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

**۲۰۰- گزینهی «۱»**

محل برخورد مجانب‌ها رو به دست میاریم:  $\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases} \xrightarrow{+} 6x = 6 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 3(1) - 4y = -1 \Rightarrow y = 1$

پس  $\omega = (1, 1)$  است. چون کانون هذلولی  $F = (6, 1)$  است، پس عرض  $\omega$  و  $F$  با هم برابرند و این موضوع نشون میده که هذلولی افقیه. شیب‌ها  $\pm \frac{3}{4}$

$$F = (6, 1) = (\alpha + c, \beta) = (1 + c, 1) \Rightarrow c = 5$$

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \frac{3}{4}a$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \xrightarrow{c=5, b=\frac{3}{4}a} 25 = a^2 + \frac{9}{16}a^2 \Rightarrow 25 = \frac{25}{16}a^2 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = 3$$

$$\text{معادله‌ی هذلولی: } \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

## یک نتیجه

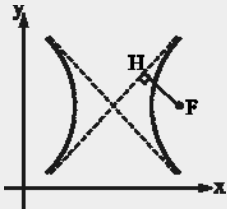
۲۰۱- گزینه‌ی «۳»

فاصله‌ی کانون از هر مجانب تو هذلولی همیشه برابر  $b$  است.

اثبات: برای اثبات این موضوع فقط یک حالت را در نظر می‌گیریم (مثلاً افقی). تو هذلولی افقی کانون  $F = (\alpha + c, \beta)$  و یکی از مجانب‌ها

$$\frac{x-\alpha}{a} = \frac{y-\beta}{b} \Rightarrow b(x-\alpha) - a(y-\beta) = 0 \quad \bullet \quad \text{است.} \quad \frac{x-\alpha}{a} = \frac{y-\beta}{b}$$

حالا فاصله‌ی  $F = (\alpha + c, \beta)$  را از خط  $\bullet$  به دست می‌یاریم.



$$|FH| = \frac{|b(\alpha + c - \alpha) - a(\beta - \beta)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

می‌دونیم که  $c^2 = a^2 + b^2$  پس:  $|FH| = b$

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$

فاصله‌ی کانون از مجانب هذلولی  $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{y^2}{k} = 1$  برابر  $b$  است پس: «۲۰۲- گزینه‌ی «۲»

$$\sqrt{k} = 2k - 6 \xrightarrow{\text{توان } 2} k = 4k^2 - 24k + 36 \Rightarrow 4k^2 - 25k + 36 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 4 \\ k = \frac{9}{4} \end{cases}$$

چون  $b = 2k - 6 = \sqrt{k}$  پس باید  $\begin{cases} 2k - 6 > 0 \\ k > 0 \end{cases}$  یعنی  $k > 3$ ؛ پس  $k = 4$  صحیح است.

## یک نتیجه

۲۰۳- گزینه‌ی «۳»

حاصل ضرب فواصل هر نقطه روی هذلولی تا مجانب‌ها برابر است با:  $\frac{a^2 b^2}{c^2}$  یا  $(\frac{b}{e})^2$

اثبات: برای راحتی اثبات مرکز هذلولی رو گذاشتیم تو مبدأ مختصات؛ یعنی معادله‌ی هذلولی رو  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  در نظر می‌گیریم. اگه  $M = (x_0, y_0)$

نقطه‌ای روی هذلولی باشه، توش صدق می‌کنه و  $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$  یا  $b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2 = a^2 b^2$

از طرفی معادله‌ی مجانب‌ها  $bx \pm ay = 0$  میشه، پس فاصله‌ی  $M$  از دو مجانب به صورت‌های  $\frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  و  $\frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  درمیاد. حاصل ضرب

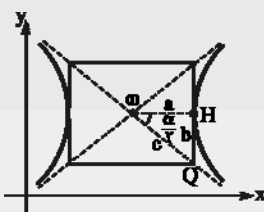
$$|MH| \times |MH'| = \frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \times \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 b^2}{c^2}$$

فاصله‌ها مدنظره:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow c^2 = 100 + 25 = 125 \Rightarrow \frac{a^2 b^2}{c^2} = \frac{25 \times 100}{125} = 20$$

## زاویه‌ی بین مجانب‌ها

۲۰۴- گزینه‌ی «۲»



اگرچه واسه‌ی این موضوع فرمول‌های زیادی نوشتن ولی من اعتقادی به فرمول حفظ کردن ندارم. روشی که می‌گم، فکر می‌کنم بهتره؛ به شکل روبه‌رو دقت کنید:

زاویه‌ی بین مجانب‌های هذلولی برابر زاویه‌ی بین قطرهای مستطیل هذلولی است؛ پس می‌تونیم از هر نسبت مثلثاتی استفاده کنیم. کافیه که زاویه‌ی بین مجانب‌ها  $\alpha$  فرض بشه و تو مثلث قائم‌الزاویه‌ی  $HQ$ ، مقدار  $\alpha$  به دست بیاد. بستگی به مستطیل داره، ممکنه که جای  $a$  و  $b$  برعکس باشه:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{b}{c} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{c}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{b}{c} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{c}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{b}{a} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{b}$$

$$\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{b}{a} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{b}$$

$$\frac{x^2}{3} + \frac{(y-1)^2}{-1} = -1 \Rightarrow \frac{(y-1)^2}{1} - \frac{x^2}{3} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$3y - 2x = 1 \Rightarrow m = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2}{3} \text{ یا } \frac{b}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \times \frac{2}{3}}{1 - (\frac{2}{3})^2} = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{12}{5} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{5}{12}$$

۲۰۵- گزینه‌ی «۱»

## فروع از مرکز هذلولی

۲۰۶- گزینه‌ی «۳»

تو هذلولی هم خروج از مرکز مثل بیضی برابر نسبت  $\frac{|FF'|}{|AA'|}$  یعنی  $e = \frac{c}{a}$  است. اما با این فرق که تو هذلولی خروج از مرکز  $e = \frac{c}{a} > 1$  است. همیشه

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \Rightarrow e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

فرمول دیگه‌ای هم واسه  $e$  پیدا کرد:

توجه کن که اگر  $e \rightarrow \infty$ ، هذلولی به دو خط عمودی یا افقی موازی میل می‌کنه و در صورتی که  $e \rightarrow 1$ ، هذلولی به دو نیم‌خط در یک امتداد میل می‌کنه.

برای حل، بهتره که مقطع مخروطی مرتب بشه؛ ضریب‌های  $x^2$  و  $y^2$  تو صورت برابر یک بشه.

$$\frac{(2x+1)^2}{9} - \frac{(3y-1)^2}{16} = -1 \Rightarrow \frac{9(y-\frac{1}{3})^2}{16} - \frac{4(x+\frac{1}{2})^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{(y-\frac{1}{3})^2}{\frac{16}{9}} - \frac{(x+\frac{1}{2})^2}{\frac{9}{4}} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{16}{9} \\ b^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} = 1 + \frac{\frac{9}{4}}{\frac{16}{9}} \Rightarrow e^2 = 1 + \frac{81}{64} = \frac{145}{64} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{145}}{8}$$

نوع هذلولی هم قائم است؛ چون ضریب  $y^2$  مثبت است.

۲۰۷- گزینه‌ی «۴»  
 خب فاصله‌ی  $FF'$  که همیشه  $2c$  وسط  $FF'$  همیشه  $\omega$  و خروج از مرکز هم که داده‌ی مسئله است، همیشه  $\frac{c}{a}$ .

$$2c = |FF'| = 2 + 2 = 4 \Rightarrow c = 2, \quad \omega = \frac{1}{2}(F + F') = (0, 0)$$

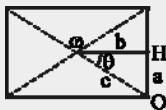
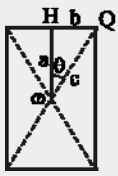
$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{4} \xrightarrow{c=2} \frac{2}{a} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 8$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 4 = 8 + b^2 \Rightarrow b^2 = -4 \Rightarrow \text{معادله‌ی هذلولی: } \frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{4} = 1 \Rightarrow y^2 - 2x^2 = 8$$

## (ابطه‌ی زاویه‌ی بین مجانب‌ها و فروع از مرکز)

۲۰۸- گزینه‌ی «۴»

اگه یادتون باشه، در مورد زاویه‌ی بین دو مجانب گفته بودیم که برای به دست آوردن زاویه بین دو مجانب از مستطیل هذلولی استفاده کنید. حالا می‌خوایم زاویه را به خروج از مرکز ربط بدیم؛ هر کدام از روابط زیر ممکنه اتفاق بیفته:



الف  $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{a}{c} = \frac{1}{e} = \frac{1}{2}$

ج  $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{a}{c} = \frac{1}{e} = \frac{1}{2}$

ب  $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{e^2 - 1}$

د  $\cot \frac{\theta}{2} = \frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$

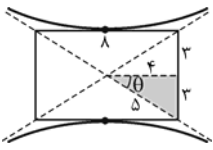
پس همه‌ی حالات بالا می‌تونه اتفاق بیفته و  $\theta$  های به دست اومده یا برابرند و یا مکمل‌اند.

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{e} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \sin^{-1} \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 2 \sin^{-1} \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{e} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \cos^{-1} \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 2 \cos^{-1} \frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{e^2 - 1} = \sqrt{9 - 1} = \sqrt{8} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \tan^{-1} \sqrt{8} \Rightarrow \theta = 2 \tan^{-1} \sqrt{8}$$

$$\cot \frac{\theta}{2} = \sqrt{8} \Rightarrow \theta = 2 \cot^{-1} \sqrt{8}$$



توضیحات مسئله نشون میدهند که ابعاد مستطیل هذلولی ۶ و ۸ است و چون هذلولی به ضلع

بزرگ مماس شده، پس هذلولی قائمه (البته می‌تونیم به جور دیگه بکشیم که افقی بشه):  $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{a}{c} = \frac{3}{5} \Rightarrow e = \frac{5}{3}$

$$a = 3, b = 4, c = 5$$

۲۰۹- گزینه‌ی «۴»

فاصله‌ی کانون از مرکز هذلولی برابر c میشه. ضمناً هذلولی افقیه؛ چون عرض  $\omega$  و F با هم برابرین:  $c = |\omega F| = 3 + 2 = 5$

۲۱۰- گزینه‌ی «۱»

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} \xrightarrow{c=5} a = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16$$

$$\text{معادله‌ی هذلولی: } \frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1 \Rightarrow 16(x+2)^2 - 9(y+2)^2 = 144$$

$$|FF'| = 2c = 8 + 1 = 9$$

۲۱۱- گزینه‌ی «۳»

تعریف هذلولی چی بود؟ مکان هندسی نقاطی که قدرمطلق فواصل آن‌ها از دو نقطه‌ی ثابت (کانون‌ها) مقداری ثابت باشد. خوب تو این سؤال هم که

$$|MF| = \sqrt{(1-4)^2 + (3+1)^2} = 5$$

یه نقطه روی هذلولی داره؛ پس کافیه که فاصله‌هاش رو از F و F' حساب کنیم:

$$|MF'| = \sqrt{(1-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{34}$$

$$||MF| - |MF'|| = 2a \Rightarrow 2a = |AA'| = \sqrt{34} - 5$$

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{9}{\sqrt{34} - 5} = \sqrt{34} + 5$$

$$\frac{c}{a} = 2 \Rightarrow e = 2$$

اگه رأس وسط F و  $\omega$  قرار بگیره، یعنی  $c = 2a$  پس:

۲۱۲- گزینه‌ی «۱»

باید دو حالت در نظر بگیریم: این که هذلولی افقی یا قائم باشه:

۲۱۳- گزینه‌ی «۱»

$$\text{افقی: } \begin{cases} a^2 = -2m - 1 > 0 \\ b^2 = 3m - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ m > \frac{2}{3} \end{cases} \xrightarrow{\cap} m \in \emptyset$$

$$\xrightarrow{\cup} -\frac{1}{2} < m < \frac{2}{3}$$

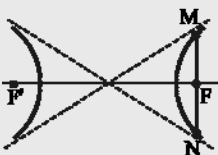
$$\text{قائم: } \begin{cases} a^2 = -(-2m - 1) > 0 \\ b^2 = -(3m - 2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m < \frac{2}{3} \end{cases} \xrightarrow{\cap} -\frac{1}{2} < m < \frac{2}{3}$$

$$(3m - 2)(-2m - 1) > 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < m < \frac{2}{3}$$

راه‌حل بهتر اینه که بگیریم  $-2m - 1$  و  $3m - 2$  هم علامت باشن یعنی:

### وتر کانونی

۲۱۴- گزینه‌ی «۲»



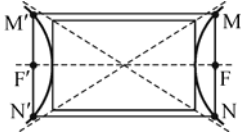
وتر کانونی همون وتری است که در کانون بر محور کانونی عمود باشه؛ اندازه‌اش هم مثل بیضی برابر  $|MN| = \frac{2b^2}{a}$ .

ضمناً  $|MN| = 2b\sqrt{e^2 - 1}$  هم هست.

راه اثبات وتر کانونی اینه که معادله‌ی خط منطبق بر وتر کانونی رو بنویسیم و با هذلولی قطع بدیم؛ نقاط برخورد میشن M و N.

$$4(x-1)^2 - (y+3)^2 = 16 \xrightarrow{\div 16} \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 16 \end{cases}$$

$$|MN| = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 16}{2} = 16$$



$$\frac{2b^2}{a} \times 2c = 2\sqrt{c^2} \Rightarrow \frac{bc}{a^2} = 2\sqrt{c^2} \Rightarrow \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} = 2\sqrt{c^2}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{e^2-1}) \cdot e = 2\sqrt{c^2} \Rightarrow (e^2-1)e^2 = 12 \xrightarrow{e^2=t} t(t-1) = 12 \Rightarrow t^2 - t - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=4 \\ t=-3 \end{cases} \Rightarrow e^2 = 4 \Rightarrow e = 2$$

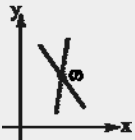
$$|MN| = \frac{2b^2}{a} = 2b \cdot \frac{b}{a} = 2b\sqrt{e^2-1} = 2 \times 2\sqrt{e^2-1} = 4\sqrt{e^2-1}$$

 نو این سؤال  $a^2 = p^2$  و  $b^2 = 4$ 
**۲۱۶- گزینه ی «۴»**
**هذلولی گسترده**
**۲۱۷- گزینه ی «۴»**

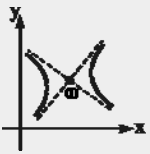
مقطع مخروطی  $G(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$  با شرط  $AB < 0$  و  $(A, B)$  مختلف‌العلامت‌اند) هذلولی و در حالت خاص دو خط متقاطع است. برای تشخیص ابتدا مرکز (مرکز تقارن) هذلولی را با استفاده از مشتق گیری نسبی (مثل بیضی) به دست میاریم:

$$\begin{aligned} G'_x = 2Ax + C = 0 &\Rightarrow x = -\frac{C}{2A} = \alpha \\ G'_y = 2By + D = 0 &\Rightarrow y = -\frac{D}{2B} = \beta \end{aligned} \Rightarrow \omega = \left(-\frac{C}{2A}, -\frac{D}{2B}\right)$$

بعد از این که مرکز تقارن  $\omega = (\alpha, \beta)$  به دست اومد، مقدار  $G(\alpha, \beta)$  را به دست میاریم و حالات مقابل رخ میدهد:



**الف** اگر مرکز تو معادله صدق کنه، دو خط متقاطع است.



**ب** اگر مرکز تو معادله صدق نکنه، هذلولی است.

$$G(x, y) = 9x^2 - 4y^2 + 18x + 16y - 7 \Rightarrow \begin{cases} G'_x = 18x + 18 = 0 \Rightarrow x = -1 = \alpha \\ G'_y = -8y + 16 = 0 \Rightarrow y = 2 = \beta \end{cases}$$

$$G(-1, 2) = 9(-1)^2 - 4(2)^2 + 18(-1) + 16(2) - 7 = 0$$

پس مرکز تقارن  $\omega = (-1, 2)$  حالا قرارش می‌دیم تو معادله:

چون  $G(-1, 2) = 0$ ، پس دو خط متقاطع است.

**۲۱۸- گزینه ی «۴»** اگر بخواد مقطع مخروطی  $G(x, y) = x^2 - 5y^2 + 4x + m - 4 = 0$  هذلولی باشه، باید مختصات مرکز تقارنش تو معادله صدق نکنه.

$$\begin{cases} G'_x = 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 = \alpha \\ G'_y = -10y = 0 \Rightarrow y = 0 = \beta \end{cases} \Rightarrow \omega = (-2, 0)$$

$$G(-2, 0) = 4 - 0 - 8 + m - 4 = m - 8 \neq 0 \Rightarrow m \neq 8$$

$$G(x, y) = x^2 - y^2 + 2x + 2y \Rightarrow \begin{cases} G'_x = 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1 = \alpha \\ G'_y = -2y + 2 = 0 \Rightarrow y = 1 = \beta \end{cases} \Rightarrow \omega = (-1, 1)$$

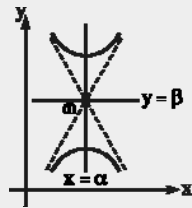
**۲۱۹- گزینه ی «۴»**
**تشخیص نوع هذلولی**
**۲۲۰- گزینه ی «۱»**

وقتی از هذلولی  $G(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$  نسبت به  $x$  و  $y$  مشتق می‌گیریم، علاوه بر این که مرکز تقارن هذلولی به دست میاد.

محورهای تقارن هم به دست میاد. یعنی محورهای تقارن هر هذلولی  $x = -\frac{C}{2A}$  و  $y = -\frac{D}{2B}$  است.

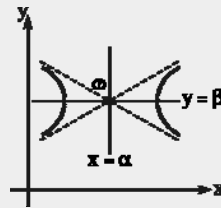
یه روش باحال برای تشخیص نوع هذلولی:

یکی از محورها را با مقطع  $G$  قطع بدید؛ به راحتی می فهمید که نوع هذلولی چیه.



هذلولی قائم

این هذلولی با  $x = \alpha$  دو برخورد داره و با  $y = \beta$  برخوردی نداره.



هذلولی افقی

این هذلولی با  $x = \alpha$  برخوردی نداره و با  $y = \beta$  دو جا برخورد داره.

چون ضریب  $x^2$  و  $y^2$  مختلف‌العلامت‌اند، پس می‌تونه هذلولی یا دو خط متقاطع باشه.

$$G(x, y) = x^2 - 4y^2 + 4x - 8y + 1 \Rightarrow \begin{cases} G'_x = 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 = \alpha \\ G'_y = -8y - 8 = 0 \Rightarrow y = -1 = \beta \end{cases}$$

حالا کافیه یکی از محورها رو (مثلاً  $y = -1$  که محور افقیه) را انتخاب کنیم و با هذلولی قطع بدیم.

$$G: x^2 - 4y^2 + 4x - 8y + 1 = 0 \xrightarrow{y=-1} x^2 - 4 + 4x + 8 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 16 - 20 < 0$$

چون  $\Delta < 0$  شد، پس ریشه نداره؛ یعنی مقطع با  $y = -1$  برخورد نداره. پس هذلولی قائمه.

**۲۲۱- گزینه‌ی «۲»** توضیحات مسئله میگه که باید  $G(x, y) = ax^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$  هذلولی افقی باشه. پس اولاً باید ضرایب  $x^2$  و  $y^2$

$$G'_y = 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1$$

مختلف‌العلامت باشند، پس باید  $a < 0$  باشد؛ ثانیاً محور افقی تو دو نقطه هذلولی رو قطع کنه.

$$ax^2 + y^2 + 4x - 2y = 0 \xrightarrow{y=1} ax^2 + 4x - 1 = 0 \quad *$$

چون هذلولی افقیه، پس محور افقی ( $y = 1$ ) باید هذلولی رو تو دو نقطه قطع کنه؛ یعنی معادله‌ی  $*$  باید دو ریشه بده. پس:

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow 16 + 4a > 0 \Rightarrow a > -4$$

$$\begin{cases} a > -4 \\ a < 0 \end{cases} \cap \rightarrow -4 < a < 0$$

**۲۲۲- گزینه‌ی «۳»** بزم توضیحات مسئله بیان می‌کنه که  $G(x, y) = x^2 - 4y^2 + ax + 4 = 0$  هذلولی قائم باشه. چون ضریب  $x^2$  و  $y^2$

مختلف‌العلامت هستند، پس کافیه که یکی از محورها رو مورد بررسی قرار بدیم. باید زنگ باشی و بفهمی که بهتره محور افقی حساب بشه؛ چون

$$G'_y = -8y = 0 \Rightarrow y = 0$$

تو  $y$  ها،  $a$  نیست.

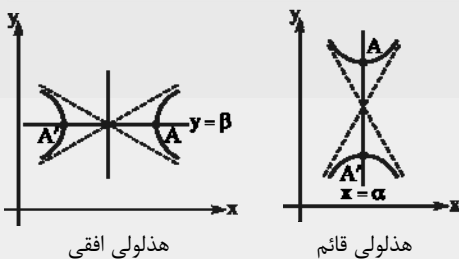
چون هذلولی قائمه، پس محور افقی  $y = 0$  هذلولی رو قطع نمی‌کنه.

$$G: x^2 - 4y^2 + ax + 4 = 0 \xrightarrow{y=0} x^2 + ax + 4 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow a^2 - 16 < 0 \Rightarrow |a| < 4$$

### مماسبندی رئوس هذلولی

**۲۲۳- گزینه‌ی «۲»**

به شکل‌های روبه‌رو توجه کن:



هذلولی افقی

هذلولی قائم

توی هذلولی قائم محور قائم و توی هذلولی افقی محور افقی، هذلولی را در دو نقطه قطع

کرده. نقاط برخورد رئوس کانونی و فاصله‌شون فاصله‌ی رئوس را می‌دهد.

$$G = x^2 - y^2 - 4x + 6y - 1 \Rightarrow \begin{cases} G'_x = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ محور قائم} \\ G'_y = -2y + 6 = 0 \Rightarrow y = 3 \text{ محور افقی} \end{cases}$$

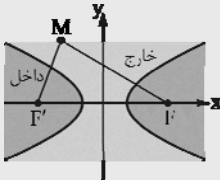
$$x^2 - y^2 - 4x + 6y - 1 = 0 \xrightarrow{x=2} 4 - y^2 - 8 + 6y - 1 = 0 \Rightarrow y^2 - 6y + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 5 \end{cases}$$

با این حرکت سه تا چیز فهمیدیم:

- ۱) هذلولی قائم بوده؛ چون محور قائم، هذلولی رو تو دو نقطه قطع کرده.
- ۲) مختصات رئوس به دست اومد:  $A = (2, 5)$  و  $A' = (2, 1)$ .
- ۳) تفاضل ریشه‌های اون معادله‌ی درجه دوم فاصله‌ی دو رأس است.  $|AA'| = 5 - 1 = 4$

### وضع نقطه و هذلولی

۲۲۴- گزینه‌ی «۱»



هر هذلولی صفحه را به سه قسمت تبدیل می‌کند که تو شکل روبه‌رو دیده می‌شود. (البته اینا قراردادیه) نقطه‌ی  $M$  ممکنه در هر یک سه قسمت قرار بگیره.

**الف** اگه  $M$  خارج هذلولی باشه،  $||MF| - |MF'|| > 2a$

**ب** اگه  $M$  داخل هذلولی باشه،  $||MF| - |MF'|| < 2a$

**ج** اگه  $M$  روی هذلولی باشه،  $||MF| - |MF'|| = 2a$

من که این روش رو دوست ندارم؛ چون طولانیه. یه روش بهتر بهت می‌گم.

هذلولی  $G(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$  و نقطه‌ی  $M = (x_0, y_0)$  مفروض است. ابتدا مرکز هذلولی را به کمک مشتق‌گیری نسبی به دست می‌آییم  $\omega = (\alpha, \beta)$ ؛ چون مرکز هذلولی همیشه خارج هذلولیه، پس می‌تونیم از این موضوع استفاده کنیم. حالت‌های زیر رخ می‌ده:

**الف** اگه  $G(\alpha, \beta) G(x_0, y_0) < 0$ ، آن‌گاه  $M$  داخل هذلولیه.

**ب** اگه  $G(\alpha, \beta) G(x_0, y_0) > 0$ ، آن‌گاه  $M$  بیرون هذلولیه.

**ج** اگه  $G(x_0, y_0) = 0$ ، آن‌گاه  $M$  روی هذلولی قرار داره.

هذلولی این سؤال  $G(x, y) = (x + 3y - 6)(x - 3y) - 8 = 0$  و نقطه‌ی موردنظر مسئله  $M = (3, -1)$  است؛ چون مجانب‌ها  $\begin{cases} x + 3y - 6 = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$  است پس:

مرکز هذلولی  $\omega = (3, 1) \Rightarrow x = 3, y = 1 \Rightarrow 2x - 6 = 0$

$$G(3, 1) = 0 - 8 = -8$$

$$G(M) = G(3, -1) = (3 - 3 - 6)(3 + 3) - 8 = -44$$

چون  $G(\omega)$  و  $G(M)$  هم‌علامت‌اند، پس نقطه‌ی  $M$  خارج هذلولی قرار داره.

### یک نتیجه

۲۲۵- گزینه‌ی «۱»

از مرکز تقارن هذلولی هیچ مماسی بر هذلولی رسم نمی‌شود.

ملاحظه خواهید کرد که نقطه‌ی  $A = (1, 2)$  مرکز تقارن هذلولی است.

$$G(x, y) = x^2 - 4y^2 - 2x + 16y - 17 \Rightarrow \begin{cases} G'_x = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 = \alpha \\ G'_y = -8y + 16 = 0 \Rightarrow y = 2 = \beta \end{cases}$$

مرکز تقارن  $(1, 2)$  است.

$$G(x, y) = 4x^2 - y^2 - 8x + k \Rightarrow \begin{cases} G'_x = 8x - 8 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ G'_y = -2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega = (1, 0)$$

۲۲۶- گزینه‌ی «۱»

چون  $M$  داخل هذلولی قرار داره، پس باید مقدار  $G(M)$  و  $G(\omega)$  مختلف‌العلامت باشه.

$$\begin{cases} G(1, 0) = 4 - 0 - 8 + k = k - 4 \\ G(1, -1) = 4 - 1 - 8 + k = k - 5 \end{cases}$$

$$G(1, 0) G(1, -1) < 0 \Rightarrow (k - 4)(k - 5) < 0 \Rightarrow 4 < k < 5$$

### وضع خط و هذلولی

۲۲۷- گزینه‌ی «۴»

اگه معادله‌ی خط و معادله‌ی هذلولی تو یک دستگاه حل بشه، تعداد نقطه‌های برخورد خط و هذلولی برابر تعداد ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم ساخته‌شده با این دستگاه است. یعنی اگه دو ریشه بده، دو جا همدیگرو قطع می‌کنن. اگه یک ریشه بده، به هم مماس میشن و در صورتی که ریشه‌ی حقیقی نده، نقطه‌ی برخوردی نخواهند داشت.



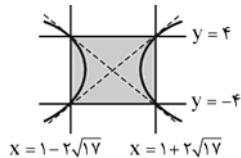
$$\begin{cases} x+y=2 \Rightarrow y=2-x \\ x^2-4y^2-6x+8=0 \Rightarrow x^2-4(2-x)^2-6x+8=0 \Rightarrow -3x^2+10x-8=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=(2,0) \\ B=(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}) \end{cases} \Rightarrow \text{وسط } M = (\frac{2+\frac{4}{3}}{2}, \frac{0+\frac{2}{3}}{2}) = (\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$$

$$|OM| = \sqrt{(\frac{5}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2} = \frac{1}{3}\sqrt{26} \quad \text{پس } M = (\frac{5}{3}, \frac{1}{3}). \text{ فاصله‌ی } O = (0,0) \text{ از } M \text{ برابر است با:}$$

۲۲۸- گزینه‌ی «۲» باید برخورد خط و هذلولی فقط یک ریشه بده:  $y^2 - x^2 + 4x - m = 0 \xrightarrow{y=2x-2} (2x-2)^2 - x^2 + 4x - m = 0$

$$\Rightarrow 3x^2 - 8x + 9 - m = 0 \Rightarrow \Delta' = 0 \Rightarrow 16 - 3(9-m) = 0 \Rightarrow 9 - m = \frac{16}{3} \Rightarrow m = 9 - \frac{16}{3} = \frac{11}{3}$$



$$\frac{(x-1)^2}{4} - y^2 = 1 \xrightarrow{y=2x-2} \frac{(x-1)^2}{4} - 16 = 1 \Rightarrow x = 1 \pm 2\sqrt{17}$$

$$S = [(1+2\sqrt{17}) - (1-2\sqrt{17})][4+4] = 4\sqrt{17} \times 8 = 32\sqrt{17}$$

۲۲۹- گزینه‌ی «۱»

### وضع نسبی دایره و هذلولی هم‌مرکز

۲۳۰- گزینه‌ی «۲»

هذلولی  $G$  با مرکز  $\omega = (\alpha, \beta)$  و فاصله‌ی رئوس  $2a$  و دایره‌ی  $C$  با مرکز  $\omega = (\alpha, \beta)$  و شعاع  $r$  مفروض است. بین هذلولی و دایره‌ی هم‌مرکز سه حالت زیر رخ می‌دهد:



الف) هذلولی و دایره نقطه‌ی مشترکی ندارند ( $r < a$ ).



ب) دایره بر هذلولی مماس است ( $r = a$ )؛ یعنی در دو نقطه مشترک و بر هم مماس‌اند.



ج) دایره و هذلولی در چهار نقطه مشترک‌اند ( $r > a$ ).

$$\text{دایره } C: x^2 + y^2 + 2y = 8 \Rightarrow x^2 + (y+1)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} \omega = (0, -1) \\ r = 3 \end{cases}$$

$$\text{هذلولی } G: \frac{(x-0)^2}{4} - (y+1)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \omega = (0, -1) \\ a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

چون مرکزها بر هم منطبق‌اند و هم‌چنین  $r > a$ ، پس دایره و هذلولی در چهار نقطه مشترک‌اند.

$$C: (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} \omega = (1, -1) \\ r = 2 \end{cases}$$

۲۳۱- گزینه‌ی «۱» باید مرکزها یکسان باشد و  $r = a$ .

$$G: 4(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 2y) = 5 + k \Rightarrow 4[(x-1)^2 - 1] - 9[(y+1)^2 - 1] = 5 + k \Rightarrow 4(x-1)^2 - 9(y+1)^2 = k \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{\frac{k}{4}} - \frac{(y+1)^2}{\frac{k}{9}} = 1$$

$$a^2 = \frac{k}{4} \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow 4 = \frac{k}{4} \Rightarrow k = 16$$

چون  $k > 0$ ، پس:

### وضع هذلولی و بیضی هم‌مرکز

۲۳۲- گزینه‌ی «۱»

بیضی  $G$  و هذلولی  $G'$  با مرکزهای یکسان مفروض است. اینا هم مثل دایره، بسته به نوع هذلولی و بیضی باید قطرهای بیضی با فاصله‌ی رئوس هذلولی مقایسه بشن.



$$\text{بیضی } \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \text{ دارای مرکز } \omega = (1, 2) \text{ و } a = 2 \text{ و } b = 3 \text{ است. هم‌چنین بیضی قائمه. هذلولی } \frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1 \text{ بر}$$

این بیضی مماسه؛ چون این هذلولی قائمه و فاصله‌ی دو رأسش برابر ۶ است.