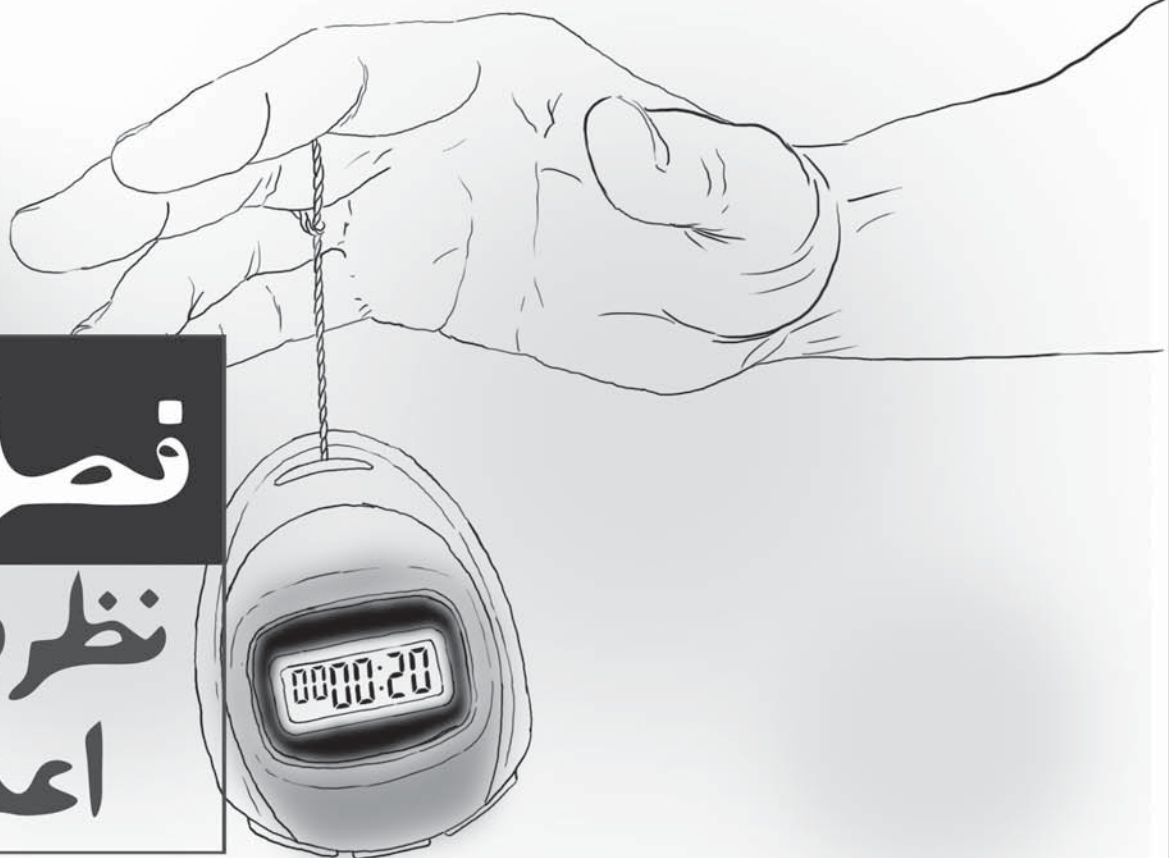


فصل ۲ نظریه‌ی اعداد



کلیات و تقسیم پذیری

عضو ابتدا و انتها

◊ اگر A یک مجموعه باشد، به α عضو ابتدای آن می‌گوییم، هرگاه تمام اعضای A بزرگ‌تر یا مساوی α باشند. β را هم عضو انتهایی مجموعه‌ی A می‌نامیم، اگر تمام اعضای مجموعه، کوچک‌تر یا مساوی β باشند.
 ◊ ممکن است مجموعه‌ی A ، عضو ابتدا یا انتها را نداشته باشد! اما عضو ابتدا و انتها حتماً باید عضو A باشند!
 ◊ عضو ابتدا و انتها در صورت وجود، منحصر به فرد هستند.

از عضو ابتدا در مجموعه، عضو کوچک‌تری نداریم و همین‌طور در مجموعه، عضو بزرگ‌تر از عضو انتها نداریم! به عبارت دیگر:

$$\alpha \xrightarrow{x < \alpha} x \notin A, \quad \beta \xrightarrow{x > \beta} x \notin A$$
 عضو ابتدای مجموعه‌ی A

۱- هرگاه $A = \{-\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{x \in \mathbb{N} | 2 < x^2 < 19\}$ ، مجموع عضو ابتدای A و عضو انتهایی مجموعه‌ی B کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\left. \begin{array}{l} A = \{-\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\} \xrightarrow{\text{نوشتن اعضا}} A = \{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots\} \xrightarrow{\text{عضو ابتدا}} -1 \\ B = \{x \in \mathbb{N} | 2 < x^2 < 19\} \xrightarrow{\text{نوشتن اعضا}} B = \{2, 3, 4\} \xrightarrow{\text{عضو انتها}} 4 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 3$$

پاسخ

جواب گزینه‌ی ۳

◊ مجموعه‌ی خوش‌ترتیب: مجموعه‌ای را خوش‌ترتیب می‌گوییم که هم خودش و هم تمام زیرمجموعه‌های غیر تهی آن، عضو ابتدا داشته باشند.
 ◊ مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ خوش‌ترتیب است و خوش‌ترتیبی $\mathbb{N}$ را اصل خوش‌ترتیبی می‌گوییم.



◁ برای تشخیص خوش‌ترتیبی مجموعه‌ی A به صورت زیر عمل کنید:

عضوهای مجموعه‌ی A (مثل $\mathbb{Z}$)		عضوهای مجموعه‌ی A ، ناشمارا هستند (مثل $\mathbb{R}$)	خوش‌ترتیب
خود A عضو ابتدا ندارد	خود A عضو ابتدا دارد	نیست	
نیست	هست		

۲- کدام مجموعه، خوش‌ترتیب نیست؟

$$A = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}, x < -3\} \quad (۲)$$

(۱) مجموعه‌ی اعداد اول دورقمی

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, -1 \leq x < 3\} \quad (۴)$$

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 20 < x^2 < 200\} \quad (۳)$$

پاسخ عضوهای این مجموعه، گویا بوده و در نتیجه ناشمارا هستند؛ بقیه‌ی گزینه‌ها رو ببین، که شمارا هستند و عضو ابتدا هم دارند:

۱ $\{11, 13, 17, \dots, 97\}$ ۲ $\{16, 25, 36, \dots\}$ ۳ $\{5, 6, 7, \dots, 14\}$

جواب گزینه‌ی ۴

استقرای ریاضی

۱ **قضیه‌ی استقرای ریاضی:** اگر مجموعه‌ی S زیرمجموعه‌ی اعداد طبیعی بوده و دارای دو ویژگی ۱ و ۲ باشد، $k \in S \Rightarrow k+1 \in S$ و $1 \in S$ ، در این صورت $S = \mathbb{N}$ خواهد بود؛ چرا که وجود ۱، نتیجه می‌دهد ۲ را و وجود ۲، عدد ۳ را می‌دهد و همین‌طور مثل آجرهای دومینو همه می‌ریزند روی هم!

◁ اگر اولین عضو مجموعه‌ی S ، به جای ۱، مثلاً ۲ باشد و $k \in S \Rightarrow k+3 \in S$ که اینم یعنی عضوهای S بعد از ۲، سه‌تا سه‌تا اضافه بشن، اون‌وقت عددی عضو S هستند که باقی‌مانده‌شون بر ۳ بشه! اینم حالت کلی‌اش:

◁ اگر مجموعه‌ی S دارای دو ویژگی ۱ و ۲ باشد، $k \in S \Rightarrow k+n \in S$ و $m \in S$ ، m عضو S دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول m و قدرنسبت n خواهند بود و نیز اعضای S به شکل $nq + m$ هستند. یعنی اونایی که باقی‌مانده‌شون بر n می‌شود m ($m < n$)!

۳- مجموعه‌ی $S \subseteq \mathbb{N}$ دارای این خواص است: $3 \in S$ است و اگر $n \in S$ باشد، $n+5 \in S$ است. S حتماً شامل کدام عدد است؟

$$1393 \quad (۴)$$

$$1391 \quad (۳)$$

$$1390 \quad (۲)$$

$$1389 \quad (۱)$$

پاسخ $S = \{3, 8, 13, 18, \dots\} \xrightarrow{\text{نوشتن اعضا}} n \in S \Rightarrow n+5 \in S, 3 \in S$

عضوهای S ، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت ۵ و جمله‌ی اول ۳ هستند. به عبارت دیگه عددی توی S است که باقی‌مانده‌اش بر ۵ بشود ۳، یعنی ۱۳۹۳. به یکانِ عددی توی S هم توجه کنی، خوبه: همه یا ۳ هستند یا ۸! جواب گزینه‌ی ۴

۲ **روش استقراء ریاضی:** در این روش، «نشان می‌دهیم» جمله‌ی موردنظر به ازای اولین مقدار n ، درست است. «فرض می‌کنیم» برای $n = k$ درست باشد و «ثابت می‌کنیم» برای $n = k+1$ هم درست خواهد بود ...

➡ برای اثبات یک نامساوی، با روش استقراء، معمولاً با ضرب کردن دو طرف فرض در عددی مناسب یک طرف حکم را می‌سازیم! بعدش سعی می‌کنیم با ساده کردن و یا اثبات یه نامساوی فرعی، از رابطه‌ای که پیدا کرده‌ایم، حکم را نتیجه بگیریم، این جوری:

$$A > B, B > C \Rightarrow A > C$$

حکم استقراء نامساوی فرعی که رابطه‌ای که یک طرفش
باید اثبات شود! مثل حکم است!

۴- در اثبات $2^n > n^2, n \geq 5$ با روش استقراء ریاضی، کدام نامساوی بدیهی به کار می‌رود؟

$$(k+1)^2 > 2 \quad (۴)$$

$$(k-1)^2 > 2 \quad (۳)$$

$$2k-1 > 5 \quad (۲)$$

$$k^2 > k \quad (۱)$$

پاسخ فرض استقراء اینه $2^k > k^2$ و حکمش هم $2^{k+1} > (k+1)^2$ ، حالا اثبات حکم:

$$2^k > k^2 \xrightarrow{\times 2} 2^{k+1} > 2k^2 \xrightarrow{?} 2^{k+1} > (k+1)^2 \quad \text{حکم}$$

حالا اگه بتونی ثابت کنی $2k^2 > (k+1)^2$ است تمومه! با روش بازگشتی شروع می‌کنیم به ساده کردنش ...

$$2k^2 > (k+1)^2 \Leftrightarrow 2k^2 > k^2 + 2k + 1 \Leftrightarrow k^2 - 2k - 1 > 0 \Leftrightarrow (k-1)^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow (k-1)^2 > 2$$

جواب گزینه‌ی ۳

۵- در اثبات نامساوی $\frac{n(n+1)}{2} > n!$ با کمک استقرای ریاضی، از کدام نامساوی بدیهی استفاده شده است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۴)

$$2^{k+1} > k+1 \quad (1) \quad 2^{k+2} > k \quad (2) \quad k^2 + 1 > k+1 \quad (3) \quad 4^k > k+2 \quad (4)$$

پاسخ فرض استقرا اینه که $2^k > k$ و حکمش هم اینه $2^{k+1} > (k+1)!$ حالا اثبات حکم:

$$\frac{k(k+1)}{2} > k! \quad \text{فرض} \quad \xrightarrow{\times (k+1)} \frac{k(k+1)}{2} (k+1) > \boxed{(k+1)k!} \xrightarrow{\frac{(k+1)(k+2)}{2} > \frac{k(k+1)}{2} (k+1)} \frac{(k+1)(k+2)}{2} > (k+1)! \quad \text{حکم}$$

با روش بازگشتی می‌ریم سراغ نامساوی فرعی مون:

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2} > \frac{k(k+1)}{2} (k+1) \xrightarrow{\div \frac{k(k+1)}{2}} \frac{(k+1)(k+2)}{2} > k+1 \Leftrightarrow 2^{k+1} > k+1$$

جواب گزینه‌ی ۱

در آن دسته از سؤالات استقراء ریاضی، که به صورت یک مجموع هستند، برای اثبات حکم، بعد از نوشتن مراحل استقراء، «آخرین جمله حکم» را به دو طرف فرض اضافه کنید ...

صورت: $1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \leq$

فرض: $1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{k} \leq$

آخرین جمله حکم! $1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{k+1} \leq$ حکم

۶- در اثبات نامساوی $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$ با روش استقرای ریاضی، کدام نامساوی بدیهی به کار می‌رود؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۰)

$$k^2 + k + 1 > k^2 + k \quad (4) \quad k^2 + k > k^2 - 1 \quad (3) \quad 2k - 1 > k + 1 \quad (2) \quad k + 2 > k + 1 \quad (1)$$

پاسخ فرض استقراء $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}$ و حکم استقراء $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$ اینان!

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k} \xrightarrow{+ \frac{1}{(k+1)^2}} 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

کافیه ثابت کنیم $2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$

$$2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1} \Leftrightarrow -\frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < -\frac{1}{k+1} \Leftrightarrow \frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \Leftrightarrow \frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k(k+1)} \Leftrightarrow (k+1)^2 > k(k+1)$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 2k + 1 > k^2 + k \Leftrightarrow k^2 + k > k^2 - 1$$

جواب گزینه‌ی ۳

۷- در اثبات نامساوی $1 + 2 + 3 + \dots + n < \frac{1}{8}(2n+1)^2$; $n \geq 1$ ، با کمک استقرای ریاضی، کدام رابطه‌ی بدیهی به کار می‌رود؟ (سراسری ریاضی ۹۰)

$$4k^2 + 12k + 9 = (2k+3)^2 \quad (4) \quad 4(k^2 + 3k + 2) < (2k+3)^2 \quad (3) \quad k+1 < 2k+3 \quad (2) \quad k+1 < 2k \quad (1)$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + k < \frac{1}{8}(2k+1)^2 \xrightarrow{?} 1 + 2 + 3 + \dots + \boxed{(k+1)} < \frac{1}{8}(2k+3)^2$$

جمله‌ی آخر حکم

پاسخ

$$\text{فرض} \xrightarrow{+ (k+1)} 1 + 2 + 3 + \dots + k + \boxed{(k+1)} < \frac{1}{8}(2k+1)^2 + \boxed{(k+1)}$$

کافیه ثابت کنی $\frac{1}{8}(2k+1)^2 + (k+1) \leq \frac{1}{8}(2k+3)^2$! بزن تو کار اثبات بازگشتی:

$$\frac{1}{8}(2k+1)^2 + k + 1 \leq \frac{1}{8}(2k+3)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{8}(4k^2 + 4k + 1) + k + 1 \leq \frac{1}{8}(4k^2 + 12k + 9) \Leftrightarrow \frac{4k^2 + 4k + 1 + 8k + 8}{8} \leq \frac{(2k+3)^2}{8}$$

$$\Leftrightarrow 4k^2 + 12k + 9 = (2k+3)^2$$

جواب گزینه‌ی ۳



۳ اگر بخواهیم در تستی، حاصل یک عبارت را که به صورت یک مجموع داده شده است بیابیم، دومین عدد قابل قبول برای متغیر را جایگذاری می‌کنیم (!) سپس این عدد را به گزینه‌ها هم می‌دهیم تا معلوم شود جواب کدام گزینه با عدد به‌دست‌آمده‌ی ما مطابقت دارد. راستی در مجموع‌ها وقتی می‌خواهیم عدد بدهیم، این عدد را به جمله عمومی می‌دهیم. بعدش یه عدد به دست می‌آید که باید با تمام جملات قبلی خودش در مجموع، جمع بشه تا حاصل مجموع به دست بیاد.

۸- اگر $n \in \mathbb{N}$ باشد، حاصل $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ کدام است؟

$$\begin{array}{cccc} \frac{2n-1}{2n+1} & \frac{1}{2n+1} & \frac{2n}{2n+1} & \frac{n}{2n+1} \\ (1) & (2) & (3) & (4) \end{array}$$

پاسخ

حالا اگه $n=2$ رو توی گزینه‌ها بذاری، فقط ۳ می‌شه! $\frac{2}{5}$ جواب گزینه‌ی ۳

۴ چندتا مجموع مهم واسه حفظ کردن:

$$\begin{array}{ll} (1) 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} & (2) 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ (3) 1^r+2^r+3^r+\dots+n^r = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^r & (4) \binom{2}{r} + \binom{3}{r} + \binom{4}{r} + \dots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1} \quad (r \geq 2) \end{array}$$

۹- اگر مجموع مکعب‌های اعداد طبیعی متوالی شروع از ۱، برابر با مربع مجموع آن اعداد باشد، حاصل $1^3 + 12^3 + 14^3 + \dots + 3^3$ کدام است؟

$$\begin{array}{cccc} 114100 & 114200 & 114300 & 114400 \\ (1) & (2) & (3) & (4) \end{array}$$

پاسخ

جواب گزینه‌ی ۴

۱۰- حاصل $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{9}{2}$ کدام است؟

$$\begin{array}{cccc} 165 & 120 & 45 & 84 \\ (1) & (2) & (3) & (4) \end{array}$$

پاسخ

جواب گزینه‌ی ۳

۵ استقرای تعمیم‌یافته: شروع (یا همان پایه‌ی) استقرا، در این حالت عدد ۱ نیست؛ بلکه عدد طبیعی m است. در این حالت ابتدا نشان می‌دهیم گزاره‌ی داده‌شده برای $n=m$ درست است (همون پایه‌ی استقرا)؛ سپس آن را برای $n=k$ ، درست فرض می‌کنیم ($k \geq m$) و برای $n=k+1$ اثبات می‌کنیم. نتیجه‌ی این کار این است که گزاره‌ی موردنظر، برای تمام اعداد طبیعی بزرگ‌تر مساوی m درست خواهد بود! $\hookrightarrow$ استقرای تعمیم‌یافته را معمولاً در اثبات نامساوی‌ها می‌بینیم.

روش خاصی برای یافتن پایه‌ی استقرای تعمیم‌یافته (همون اولین مقدار n قابل قبول) وجود ندارد به‌جز امتحان کردن عدد گزینه‌ها، از کوچک به بزرگ!

۱۱- در اصل استقرای تعمیم‌یافته برای حکم $4^n < (n+1)!$ ($n \geq m$) عدد طبیعی مناسب m کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸)

$$\begin{array}{cccc} 4 & 5 & 6 & 7 \\ (1) & (2) & (3) & (4) \end{array}$$

پاسخ

۱ $n=4$ در نامساوی سؤال $4^4 < 5!$ $\rightarrow 256 < 120$ ✗

۲ $n=5$ در نامساوی سؤال $4^5 < 6!$ $\rightarrow 1024 < 720$ ✗

۳ $n=6$ در نامساوی سؤال $4^6 < 7!$ $\rightarrow 4096 < 5040$ ✓

جواب گزینه‌ی ۳

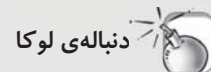


۶ استقرای قوی: در این نوع استقرا ابتدا ۱ و ۲ را درون مجموعه‌ی S قرار می‌دهیم، سپس از بودن ۱ و ۲، وجود عدد ۳ را نتیجه می‌گیریم. بعدش از وجود ۱ و ۲ و ۳، بودن عدد ۴ را و همین‌طور الی آخر. این‌طوری معلوم می‌شه تمام اعداد طبیعی، عضو S خواهند بود.

اینم صورت ریاضی: $(1, 2 \in S, 1, 2, \dots, k \in S \Rightarrow k+1 \in S) \Rightarrow S = \mathbb{N}$

روش اثبات با استقرای قوی هم این‌طوره: به جای n، بذار ۱ و ۲ و نشان بده جمله‌ی حاصل درسته، بعدش به جای n، اعداد ۱، ۲، ... و k را بذار و درستی همه‌شون رو فرض بگیر! در آخر به جای n، بذار k+۱ و ثابت کن جمله‌ی حاصل درسته ...

بهترین مورد استفاده‌ی استقرای قوی، در اثبات خواص مربوط به دنباله‌های بازگشتی است.



دنباله‌ی لوکا

۱ اعداد دنباله: ۱, ۳, ۴, ۷, ۱۱, ...

۲ طریقه‌ی ساخته‌شدن و ضابطه: دو جمله‌ی اول یعنی ۱ و ۳ را حفظ کنید، بعدش جمع این دو تا می‌شه جمله‌ی سوم، حالا جمله‌ی چهارم را از جمع جملات سوم و دوم پیدا کنید و همین‌طور تا آخر:

$$L_1 = 1, L_2 = 3, L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

۳ ویژگی جملات دنباله‌ی لوکا: با استقرای قوی ثابت می‌شود که اگر L_n جمله‌ی nام دنباله‌ی لوکا باشد، آن وقت $L_n < (\frac{7}{4})^n$.

۱۲- در دنباله‌ی لوکا با رابطه‌ی بازگشتی $L_1 = 1, L_2 = 3, L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ ، برای اثبات $L_n < (\frac{7}{4})^n$ از کدام رابطه‌ی درست، استفاده می‌شود؟

$$\frac{11}{4} < \frac{49}{16} \quad (2) \quad k-1 < k+1 \quad (1) \quad \frac{7}{4} < \frac{49}{16} \quad (4) \quad k-1 < k \quad (3)$$

پاسخ اول حکم رو کمی ساده می‌کنیم: $L_{k+1} < (\frac{7}{4})^{k+1} \xrightarrow{\text{طبق فرمول لوکا}} L_k + L_{k-1} < (\frac{7}{4})^{k+1}$

اما طبق فرض‌های استقرای قوی داریم:

$$L_k < (\frac{7}{4})^k, L_{k-1} < (\frac{7}{4})^{k-1}$$

پس با جمع طرفین دو رابطه به دست میاد:

$$L_k + L_{k-1} < (\frac{7}{4})^k + (\frac{7}{4})^{k-1}$$

حالا کافی‌ه ثابت کنیم:

$$(\frac{7}{4})^k + (\frac{7}{4})^{k-1} < (\frac{7}{4})^{k+1} \xrightarrow{\text{فاکتور}} (\frac{7}{4})^{k-1} (\frac{7}{4} + 1) < (\frac{7}{4})^{k-1} (\frac{7}{4})^2 \Leftrightarrow \frac{11}{4} < \frac{49}{16} \quad \checkmark$$

جواب گزینه‌ی ۲

بخش پذیری

عدد b را بر a بخش‌پذیر می‌گوییم هرگاه در تقسیم b بر a، باقی‌مانده صفر شود و می‌نویسیم $a|b$. اما خوب است یادآوری کنیم $a|b$ به صورت‌های زیر نیز خوانده می‌شود:

۱ a مقسوم‌علیه (عامل، شمارنده) b است. ۲ b مضرب a است یا $b = ak$. ۳ a عاد می‌کند b را. ۴ b بر a، تقسیم‌پذیر است.

بهترین روش حل تست‌های بخش‌پذیری این‌ه که وقتی سؤال می‌گه «a مضرب m است»، به جاش بنویسیم $a = mk$! بعدش دیگه



جاگذاری و فاکتور و ساده‌کردن و ایناست ...

۱۳- اگر هر سه عدد x، y و z مضرب ۶ باشند، باقی‌مانده‌ی $x^3 + y^3 + z^3$ بر ۷۲ کدام است؟ (آزار ریاضی ۸۰)

۱) صفر ۲) فقط ۲ ۳) فقط ۴ ۴) ۲ یا ۴



پاسخ

$$\begin{cases} x = 6k \\ y = 6k' \\ z = 6k'' \end{cases} \xrightarrow{\text{تعریف}} \begin{cases} x^3 = 216k^3 \\ y^3 = 216k'^3 \\ z^3 = 216k''^3 \end{cases} \xrightarrow{\text{توان ۳}} x^3 + y^3 + z^3 = 216k^3 + 216k'^3 + 216k''^3$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور}} x^3 + y^3 + z^3 = 216(k^3 + k'^3 + k''^3) \xrightarrow{216=3 \times 72} x^3 + y^3 + z^3 = 72 \times (3k_1) \Rightarrow \text{باقی‌مانده بر ۷۲ مضرب ۷۲ است} \Rightarrow \text{۳} \quad \text{ت}$$

جواب گزینه‌ی ۱

اگه دیدی که به بخش‌پذیری، سمت راستش عددی معلوم بود، اون وقت عدد سمت چپ رو مساوی تک‌تک مقسوم‌علیه‌های اون بذار و حل کن و مقادیر متغیر رو پیدا کن ... خواست باشه مقدار متغیرهایی که به دست میاری، همه باید صحیح باشن!





۱۴- هرگاه $3x + 2 \mid 10$ ، در این صورت مجموع جواب‌های ممکن برای x کدام است؟ ($x \in \mathbb{Z}$)

-۱ (۴)

۱ (۳)

-۴ (۲)

-۲ (۱)

پاسخ

$$3x + 2 \mid 10 \xrightarrow{\text{مقسوم‌علیه‌های } 10} 3x + 2 = \begin{cases} \pm 1 \\ \pm 2 \\ \pm 5 \\ \pm 10 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل}} x = -\frac{1}{3}, -1 \text{ یا } 0, -\frac{4}{3} \text{ یا } 1, -\frac{7}{3} \text{ یا } \frac{8}{3}, -4 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = -1, 0, 1, -4 \xrightarrow{+} -4$$

جواب گزینه‌ی ۲

خواص عمومی بخش‌پذیری



① $\begin{cases} a \mid b \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} ma \mid mb \\ ma \mid mb \xrightarrow{m \neq 0} a \mid b \end{cases}$

② $a \mid b \Rightarrow (a \mid nb, a \mid b + ma)$

③ $(a \mid b, b \mid c) \Rightarrow a \mid c$

④ $a \mid b \xrightarrow{(n \in \mathbb{N})} a^n \mid b^n$

سمت راست بخش‌پذیری را در هر عدد صحیحی می‌توان ضرب کرد؛ اما تنها با عددی که مضرب سمت چپ است، می‌توان جمع کرد!



(فارج از کشور ۸۶)

۱۵- اگر $a \mid b$ و $a \mid c$ ، کدام درست نیست؟

$a^2 \mid bc$ (۴)

$a^2 \mid b + c$ (۳)

$a \mid b^2 + c$ (۲)

$a \mid b + c$ (۱)

مثال نقض: $\begin{matrix} 3 \mid 3 \\ 3 \mid -6 \end{matrix} \xrightarrow{a^2 \mid b+c} 9 \mid -3$ ✗

پاسخ

در مورد ① $a \mid b$ و چون c مضرب a است، می‌توانیم آن را به سمت راست اضافه کنیم! در مورد ② اول از $a \mid b$ نتیجه گرفته‌اند $a \mid b \times b$ چون ضرب سمت راست در هر عددی آزاد! بعد c رو که مضرب a بوده به سمت راست اضافه کردن! اینم اثبات ④:

$\begin{matrix} a \mid b \\ a \mid c \end{matrix} \xrightarrow{\text{تعریف}} \begin{cases} ak = b \\ ak' = c \end{cases} \xrightarrow{\text{ضرب طرفین}} a^2 \overbrace{(kk')}^{k_1} = bc \Rightarrow a^2 k_1 = bc \xrightarrow{\text{تعریف}} a^2 \mid bc$

جواب گزینه‌ی ۳

بخش‌پذیری در مورد عبارت‌های دوجمله‌ای با توان مساوی:



$a + b \mid a^n - b^n$	$a + b \mid a^n + b^n$	$a - b \mid a^n - b^n$	صورت بخش‌پذیری
n عدد طبیعی و زوج باشد	n عدد طبیعی و فرد باشد	n هر عدد طبیعی دلخواه باشد	شرط برقراری

(آزار ریاضی ۸۷)

۱۶- کدام گزینه درست است؟

$(a+b) \mid (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2$ (۲)

$(a+b) \mid (a+b)^2 - 2ab$ (۱)

$(a+b) \mid (a-b)^2 + 2ab$ (۴)

$(a+b) \mid (a-b)^3 - 3a^2b - 3b^2a$ (۳)

پاسخ

$(a+b)^3 \xrightarrow{\text{اتحاد}} a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 \Rightarrow (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 = a^3 + b^3 \xrightarrow{a+b \mid a^3+b^3} a+b \mid (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2$

جواب گزینه‌ی ۲

حالت کلی‌تر در مورد دوجمله‌ای‌های توان مساوی! ($k \in \mathbb{Z}$)

$a^m + b^m \mid a^n - b^n$	$a^m + b^m \mid a^n + b^n$	$a^m - b^m \mid a^n - b^n$	صورت بخش‌پذیری
$\frac{n}{m} = 2k$	$\frac{n}{m} = 2k + 1$	$\frac{n}{m} = k$	شرط برقراری

۱۷- هرگاه $126 \mid 5^n + 1$ ، در این صورت جمع ارقام بزرگ‌ترین عدد دورقمی n ، کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۲ (۳)

۱۶ (۲)

۱۵ (۱)

$126 \mid 5^n + 1 \xrightarrow{126=125+1} 5^3 + 1 \mid 5^n + 1 \Rightarrow 5^3 + 1^3 \mid 5^n + 1^n \xrightarrow{\frac{n}{3}=2k+1} n = 6k + 3$

پاسخ

$\xrightarrow{n \text{ دورقمی است}} 100 \leq 6k + 3 < 1000 \xrightarrow{\text{ساده}} \frac{97}{6} \leq \frac{97}{6} < \frac{97}{6} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 1 < k \leq 16 \xrightarrow{\frac{k_{\max}=16}{n=6k+3}} n_{\max} = 6(16) + 3 = 99 \xrightarrow{\text{جمع ارقام}} 18$

جواب گزینه‌ی ۴



۲۱- در تقسیم -۴۴ بر ۱۷ ، خارج قسمت q و باقی مانده r است. $r - q$ برابر است با:

۱۰ (۴)

۱۲ (۳)

-۱۲ (۲)

۱۰ (۱)

$$\begin{array}{r} 17 \\ -44 \overline{) 17} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -51 \\ -3 \overline{) -51} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ -44 \overline{) -51} \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow q = -3, r = 7 \Rightarrow r - q = 7 - (-3) = 10$$

پاسخ واضح است باید q منفی باشد و وقتی هم در ۱۷ ضرب شد، قدرمطلقش از ۴۴ بزرگ تر باشد:

جواب گزینه‌ی ۱

دسته بندی تست های تقسیم

۱ وقتی الگوریتم تقسیم رو می نویسی، اون وقت b معلومه و r مجهول! شایدم برعکس باشه: یعنی باقی مانده معلومه و مقسوم علیه

نامعلوم ...! این گروه تست ها با نوشتن شرط باقی مانده یعنی $0 \leq r < b$ حل می شوند ...

۲۲- در تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۷ باقی مانده‌ی تقسیم از مربع خارج قسمت آن ۲ واحد کم تر است. بزرگ ترین مقدار a مضرب کدام عدد

است؟

۱۶ (۴)

۱۴ (۳)

۱۲ (۲)

۹ (۱)

$$a = 37q + r \xrightarrow{0 \leq r < b} 0 \leq q^2 - 2 < 37 \Rightarrow 2 \leq q^2 < 39 \Rightarrow 2 \leq q \leq 6$$

$$\xrightarrow{q_{\max}=6} a_{\max} = 37(6) + (6^2 - 2) = 256 \xrightarrow{256=16 \times 16} \text{ مضرب } 16 \text{ است.}$$

جواب گزینه‌ی ۴

۲۳- مجموع ارقام بزرگ ترین عددی که باقی مانده اش در تقسیم بر ۴۷ ، توان دوم خارج قسمت است، کدام است؟

۱۴ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۶ (۱)

$$a = 47q + r \xrightarrow{0 \leq r < b} 0 \leq q^2 < 47 \Rightarrow -6 \leq q \leq 6 \xrightarrow{q_{\max}=6} a_{\max} = 47(6) + 36 = 318 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 12$$

جواب گزینه‌ی ۳

۲۴- در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b ، باقی مانده ۱۷ و خارج قسمت ۲۵ می باشد. اگر a مضرب ۶ باشد، رقم دهگان کوچک ترین عدد طبیعی

a کدام است؟

۹ (۴)

۶ (۳)

۷ (۲)

۸ (۱)

$$a = bq + r \xrightarrow{q=25} a = b(25) + 17 \xrightarrow{0 \leq r < b} 0 \leq 17 < b \Rightarrow b = 18, 19, 20, \dots$$

$$\xrightarrow{\text{مضرب } 6 \text{ است}} \xrightarrow{b_{\min}=19} a_{\min} = 19(25) + 17 = 492 \Rightarrow \text{رقم دهگان} = 9$$

جواب گزینه‌ی ۴

۲ اگر در یک تقسیم، k واحد به مقسوم اضافه شود، k واحد به باقی مانده اضافه خواهد شد! فقط اگر $r + k$ از مقسوم علیه بزرگ تر شد،

آن را بر b تقسیم کرده و جزء صحیحش را به خارج قسمت اضافه کنید تا باقی مانده‌ی درست، معلوم شود!

یه جور دیگه: اگه k واحد به مقسوم اضافه کنی، $\left[\frac{r+k}{b}\right]$ به خارج قسمت اضافه می شه ...!

۲۵- در تقسیم عدد a بر ۶۳ باقی مانده ۱۷ است اگر ۶۰ واحد به a اضافه کنیم باقی مانده و خارج قسمت چه تغییری می کنند؟ (آزاد ریاضی ۸۵)

(۱) سه واحد کم می شود - یک واحد اضافه می شود.

(۲) سه واحد اضافه می شود - یک واحد اضافه می شود.

(۳) سه واحد اضافه می شود - تغییر نمی کند.

(۴) سه واحد کم می شود - دو واحد اضافه می شود.

پاسخ روش اول: مفهومی

$$a = 63q + 17 \xrightarrow{+60} a + 60 = 63q + 17 + 60 \Rightarrow a + 60 = 63q + 77$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور}} a + 60 = 63(q+1) + 14 \quad \begin{cases} \text{خارج قسمت به اضافه ۱ شده!} \\ \text{واحد کم شده} \Rightarrow \text{باقی مانده هم از ۱۷ رسیده به ۱۴} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{مقسوم جدید}} \quad \quad \quad$$

$$k = 60 \xrightarrow{\left[\frac{r+k}{b}\right]} \left[\frac{17+60}{63}\right] = 1$$

روش دوم: فرمولی

جواب گزینه‌ی ۱

(فارج از کشور ۸۶)

۲۶- در تقسیم عدد a بر ۱۷ اگر باقی‌مانده ۸ باشد و ۱۰ واحد به مقسوم اضافه کنیم:

- (۱) باقی‌مانده تغییر نمی‌کند.
(۲) باقی‌مانده ۱ واحد کم می‌شود.
(۳) باقی‌مانده ۷ واحد کم می‌شود.
(۴) باقی‌مانده ۷ واحد اضافه می‌شود.

پاسخ

باقی‌مانده ۷ واحد کم شده است $\rightarrow$ باقی‌مانده از ۸ رسیده به ۱ $\rightarrow 17(q+1)+1 = 17q+18 \xrightarrow{18=17+1} a+10 = 17q+18 \xrightarrow{+10} a = 17q+8$
مقسوم جدید

جواب گزینه‌ی ۳

(۳) اگر باقی‌مانده‌ی a بر عدد b را داده بود و باقی‌مانده‌ی a بر b خواسته بود، به جای a در اون عبارت، باقی‌مانده را قرار دهید. فقط اگر جواب از مقسوم‌علیه بزرگ‌تر شد که می‌دونید باید بر مقسوم‌علیه تقسیم کنید و باقی‌مانده‌اش را بگویید. هم‌چنین اگه باقی‌مانده منفی دراومد ...!

۲۷- باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۱۷ برابر ۸ است. باقی‌مانده‌ی $2a^2 - 5a - 19$ بر ۱۷ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۷ (۴) ۱۵

پاسخ $17 \overline{) 69} \begin{array}{r} 4 \\ 68 \\ \hline 1 \end{array}$ باقی‌مانده ۱ $\rightarrow 69 > 17 \rightarrow 2(8)^2 - 5(8) - 19 = 69 \xrightarrow{2a^2-5a-19} a=8 \xrightarrow{q=0} a=17q+8$

جواب گزینه‌ی ۲

۲۸- باقی‌مانده‌ی تقسیم a و b بر ۱۹ به ترتیب ۵ و ۳ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $2a - 5b$ بر ۱۹ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۵

پاسخ روش اول:

$a = 19q + 5 \xrightarrow{q, q'=0} a = 5, b = 3 \xrightarrow{2a-5b} 2(5) - 5(3) = 10 - 15 = -5 \xrightarrow{-5 < 0} -5 \overline{) 19} \begin{array}{r} 3 \\ 15 \\ \hline 4 \end{array}$
باقی‌مانده ۱۴ $\rightarrow 19 - 15 = 4$

روش دوم:

$a = 19q + 5 \xrightarrow{2a-5b} 2a - 5b = 2(19q + 5) - 5(19q' + 3) = 38q + 10 - 95q' - 15 \Rightarrow 2a - 5b = 38q - 95q' - 5$
 $b = 19q' + 3$
 $\Rightarrow 2a - 5b = 38q - 95q' - 19 + 14 \xrightarrow{\text{فاکتور}} 2a - 5b = 19(2q - 5q' - 1) + 14$
باقی‌مانده ۱۴ $\rightarrow 14$

جواب گزینه‌ی ۳

(۴) اگر در یک تقسیم، عددهایی را به اجزای تقسیم اضافه یا کم کرده بود، به الگوریتم خام بنویس، این‌جوری: $a = bq + r$ ، بعد تغییراتی رو هم که تست گفته بود، توی به الگوریتم تقسیم جدید بنویس، بعد این دوتا رابطه رو از هم کم کن ...

۲۹- در یک تقسیم، ۵۷ واحد به مقسوم و ۳ واحد به خارج‌قسمت اضافه کرده‌ایم، مقسوم‌علیه تغییری نکرده ولی باقی‌مانده ۶ واحد زیاد شده است. مقسوم‌علیه کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴) ۱۹

پاسخ $a = bq + r$
 $57 + a = b(q + 3) + (r + 6) \xrightarrow{-} 57 = 3b + 6 \xrightarrow{\text{حل}} b = 17$

جواب گزینه‌ی ۳

(۵) در تقسیمی با خارج‌قسمت q و باقی‌مانده‌ی r ، حداکثر به مقدار $\left[\frac{r}{q}\right]$ می‌توان به مقسوم‌علیه افزود؛ بدون آن که مقسوم و خارج‌قسمت تغییر کنند.



۳۰- در تقسیم a بر b باقی‌مانده ۸۰ و خارج‌قسمت ۱۳ است. حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم‌علیه افزود بدون آن‌که مقسوم و خارج‌قسمت تغییر کنند؟

$$r = ۸۰, q = ۱۳ \xrightarrow{\text{در } \left[\frac{r}{q}\right]} \left[\frac{۸۰}{۱۳}\right] = ۶$$

$$a = bq + r \xrightarrow{q=۱۳, r=۸۰} a = b(۱۳) + ۸۰ \xrightarrow{\text{مقسوم‌علیه به اضافی } x} a = (b+x)(۱۳) + r$$

$$\xrightarrow{\text{منهای رابطه‌ی اصلی کن!}} \frac{a}{a=b(۱۳)+۸۰} \Rightarrow ۰ = ۱۳x + r - ۸۰ \Rightarrow r = ۸۰ - ۱۳x \xrightarrow{r \geq ۰} ۸۰ - ۱۳x \geq ۰ \Rightarrow ۱۳x \leq ۸۰ \Rightarrow x \leq \frac{۸۰}{۱۳}$$

$$\xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \leq ۶ \xrightarrow{\text{بیشترین مقدار } x} ۶$$

جواب گزینه‌ی ۳

۶ در تقسیمی که مقسوم‌علیه‌اش b و باقی‌مانده‌اش r است، حداکثر به میزان $b-r-۱$ واحد می‌توان به مقسوم افزود؛ بدون آن‌که مقسوم‌علیه و خارج‌قسمت تغییری کنند.

۳۱- در تقسیم a بر ۱۱۷ باقی‌مانده ۹۴ است. حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم اضافه کرد بدون آن‌که خارج‌قسمت و مقسوم‌علیه تغییری کنند؟

$$b = ۱۱۷, r = ۹۴ \xrightarrow{\text{در } b-r-۱} ۱۱۷ - ۹۴ - ۱ = ۲۲$$

$$a = ۱۱۷q + ۹۴ \xrightarrow{\text{به مقسوم } x \text{ واحد اضافه کن!}} a + x = ۱۱۷q + r \xrightarrow{\text{منهای رابطه‌ی اولی کن!}} \frac{a}{a=۱۱۷q+۹۴} \rightarrow x = r - ۹۴$$

$$\Rightarrow r = ۹۴ + x \xrightarrow{\frac{0 \leq r < b}{b=۱۱۷}} ۹۴ + x < ۱۱۷ \Rightarrow x < \frac{۱۱۷-۹۴}{۲۳} \Rightarrow x_{\max} = ۲۲$$

جواب گزینه‌ی ۲

۷ گاهی بعد از نوشتن الگوریتم تقسیم، باید روی عامل‌های موجود در یک طرف تساوی متمرکز شوی! مثلاً اگر عبارت سمت راست مضرب ۳ باشد، سمت چپ هم باید مضرب ۳ باشد و ...

۳۲- باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۹ و ۷ به ترتیب ۵ و ۳ است. باقی‌مانده‌ی a بر ۶۳ کدام است؟

$$a = ۹q + ۵ \xrightarrow{\times ۷} ۷a = ۶۳q + ۳۵ \xrightarrow{-} ۷a = \underbrace{۶۳q' - ۶۳q}_{k} + \underbrace{۲۷ - ۳۵}_{-۸}$$

$$a = ۷q' + ۳ \xrightarrow{\times ۹} ۹a = ۶۳q' + ۲۷$$

$$\begin{matrix} \boxed{۷a} = ۶۳k - \boxed{۸} \\ \text{مضرب } ۲ \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \boxed{۲a} = ۶۳k - \boxed{۸} \\ \text{مضرب } ۲ \end{matrix} \xrightarrow{\text{باید } k \text{ مضرب } ۲ \text{ باشد}} \begin{matrix} \boxed{۲a} = ۶۳(۲t) - ۸ \\ k=۲t \end{matrix} \Rightarrow \boxed{۲a} = ۱۲۶t - ۸$$

$$\xrightarrow{\div ۲} a = ۶۳t - \boxed{۴} \Rightarrow a = ۶۳t - ۶۳ + ۵۹ \Rightarrow a = ۶۳'t + \boxed{۵۹}$$

باقی‌مانده

جواب گزینه‌ی ۲

۳۳- عدد a مضرب ۳ بوده و باقی‌مانده‌ی تقسیمش بر ۱۴ برابر ۵ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $\frac{a}{۳}$ بر ۱۴ کدام است؟

$$a = ۱۴q + \boxed{۵} \Rightarrow a = ۱۴q + ۲۸ - ۲۳ \Rightarrow \boxed{a} = ۱۴(q-۲) + \boxed{۲۳}$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور}} \xrightarrow{\text{مضرب } ۳ \text{ اند}} \xrightarrow{\text{مضرب } ۳ \text{ است}} \xrightarrow{q-۲=۳k} a = ۱۴(۳k) + ۲۳ \xrightarrow{\div ۳} \frac{a}{۳} = ۱۴k + \boxed{۱۱}$$

باقی‌مانده

جواب گزینه‌ی ۴

راستی در تقسیم، ما با اعداد طبیعی سروکار داریم! پس اگر سمت راست تساوی عددی معلوم و ثابت داشتی، و سمت چپ تساوی هم عبارتهایی که به صورت ضرب درآمده‌اند، معطل نکن، بین تجزیه‌ی این عدد ثابت‌ه چیه؟! اون وقت اون عبارتهای سمت چپ هم به دست میان!



۷۴- هرگاه $30! \mid 6^n$ ، در این صورت بیشترین مقدار n کدام است؟

- ۱۳ (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴)

پاسخ $6 = 2 \times 3$ و تعداد ۳‌ها رو حساب کنیم! آخه تعدادشون از تعداد ۲‌ها حتماً کم‌تره ...!

$$30! \text{ در } 3 \text{ توان } 3 = \left[\frac{30}{3}\right] + \left[\frac{30}{9}\right] + \left[\frac{30}{27}\right] = 10 + 3 + 1 = 14$$

جواب گزینه‌ی ۲

۷۵- عدد (75) ، مختوم به چند صفر است؟

- ۱۵ (۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸ (۴)

$$75! \text{ در } 5 \text{ توان } 5 = \left[\frac{75}{5}\right] + \left[\frac{75}{25}\right] = 15 + 3 = 18 \xrightarrow{\text{تعداد } 10\text{ ها}} \xrightarrow{\text{۲ ها زیاده!}} 18$$

پاسخ

جواب گزینه‌ی ۴

۷۶- اگر $k!$ کوچک‌ترین عدد صحیح به صورت فاکتوریل باشد که بر 21^{22} بخش‌پذیر است، مقدار k کدام است؟

- ۱۳۳ (۱) ۱۴۰ (۲) ۱۴۷ (۳) ۱۵۴ (۴)

پاسخ برای محاسبه‌ی توان عدد ۲۱، باید تعداد ۷‌ها رو حساب کنیم؛ آخه تعداد ۳‌ها از ۷‌ها قطعاً بیشتره ...! حالا در امتحان گزینه‌ها:

۱ $133 \xrightarrow{\text{تعداد ۷ ها}} \left[\frac{133}{7}\right] + \left[\frac{133}{49}\right] = 19 + 2 = 21$

۲ $140 \xrightarrow{\text{تعداد ۷ ها}} \left[\frac{140}{7}\right] + \left[\frac{140}{49}\right] = 20 + 2 = 22$ ✓

جواب گزینه‌ی ۲

برای عددهایی که به صورت ضرب هستند ولی فاکتوریلی نیستند، تعداد صفرهای مقابل عدد، برابر است با تعداد عامل‌های 10 . این جورى بهت بگم که تعداد ۲‌ها و ۵‌ها رو حساب کن و تعداد هر کدوم که کم‌تر بود، اونو اعلام کن ...!

۷۷- عدد $30! \times 5^{30}$ در سمت راست چند صفر دارد؟

- ۳۰ (۱) ۳۶ (۲) ۳۶ (۳) ۳۷ (۴)

$$30! \text{ در } 5 \text{ توان } 5 = \left[\frac{30}{5}\right] + \left[\frac{30}{25}\right] = 6 + 1 = 7 \xrightarrow{\text{تعداد کل ۵ ها}} 7 + 30 = 37$$

پاسخ

$$30! \text{ در } 2 \text{ توان } 2 = \left[\frac{30}{2}\right] + \left[\frac{30}{4}\right] + \left[\frac{30}{8}\right] + \left[\frac{30}{16}\right] = 15 + 7 + 3 + 1 = 26$$

پس اگه با جفت کردن هر ۲ و ۵ با هم، عدد 10 رو بسازیم، ۲۶ تا 10 ساخته می‌شه و ۲‌ها تموم می‌شن، حالا هر چندتا ۵ اضافه بمونه، بی‌فایده است! جواب گزینه‌ی ۲

تعداد صفرهای جلوی عدد، در حالات دیگر:



نحوه‌ی محاسبه ...	تعداد صفرهای ...	
تعداد صفرهای جلوی $A!$ و $B!$ رو جدا جدا حساب کن، بعد با هم جمعشون کن!	$A! \times B!$	۱
تعداد صفرهای جلوی $B!$ رو از تعداد صفرهای جلوی $A!$ کم کن ...!	$\frac{A!}{B!}$	۲
بین $A!$ کوچک‌تره یا $B!$ هر کدوم که کوچک‌تر بود، تعداد صفرهای جلوی اونو حساب کنی، تمومه ...	$A! \pm B!$	۳

۷۸- تعداد صفرهای سمت راست عدد $\frac{400!}{40!}$ چه قدر از تعداد صفرهای سمت راست عدد $120! + 200!$ بیشتر است؟

- ۶۲ (۱) ۶۱ (۲) ۶۰ (۳) ۶۳ (۴)

$$\left. \begin{array}{l} \text{تعداد ۵} \rightarrow \left[\frac{400}{5}\right] + \left[\frac{400}{25}\right] + \left[\frac{400}{125}\right] = 80 + 16 + 3 = 99 \\ \text{تعداد ۴} \rightarrow \left[\frac{40}{4}\right] + \left[\frac{40}{20}\right] = 10 + 2 = 12 \end{array} \right\} \rightarrow 99 - 12 = 87$$

پاسخ

$$200! + 120! \xrightarrow{\text{تعداد ۵}} \left[\frac{200}{5}\right] + \left[\frac{120}{5}\right] = 40 + 24 = 64$$

صفرهای کم‌تری داره!

پس اختلاف صفرها $87 - 64 = 23$ تاست؛ یعنی ۶۲ جواب گزینه‌ی ۱

اگر تعداد صفرهای جلویی $A!$ و $B!$ مساوی بودن، موقع حساب کردن تعداد صفرهای سمت راست عددهای $A! \pm B!$ از عدد کوچک‌تره فاکتور بگیر، بعد بین پرانتز حاصل، عامل ۵ داره یا نه؟ اگر داشت به تعداد عامل‌های ۵، صفر جلوی عدد اضافه خواهد شد ...

۷۹- تعداد صفرهای مقابل $23! + 24!$ کدام است؟

۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

پاسخ

$$23! + 24! \xrightarrow{\text{فاکتور}} 23!(24+1) = 23! \times 25$$

۲ تا عامل ۵ داره!
۲۴ × ۲۳!

$$23! \times 25 \xrightarrow{+2} 23! \times 25 \times 2 = 23! \times 50$$

۶ تا عامل ۵
۲۵ قادر به ساختن ۲ تا صفره!

جواب گزینه ۳

منظور از نماد $\alpha_p(n)$ ، بزرگ‌ترین توان عدد p است که n را می‌شمارد. به عبارت دیگر؛ n رو به عوامل اول تجزیه کن و توان p را در آن بگو! راستی اگر $p > n$ باشه، $\alpha_p(n) = 0$ است!

۸۰- کدام عدد از بقیه بزرگ‌تر است؟

۴ (۱) $\alpha_2(24)$ ۲ (۲) $\alpha_3(45)$ ۳ (۳) $\alpha_5(100)$ ۴ (۴) $\alpha_7(96)$

پاسخ

$$\begin{aligned} 1 \quad 24 &= 3 \times 2^3 \xrightarrow{\alpha_2(24)} 3 \\ 2 \quad 45 &= 3^2 \times 5 \xrightarrow{\alpha_3(45)} 2 \\ 3 \quad 100 &= 2^2 \times 5^2 \xrightarrow{\alpha_5(100)} 2 \\ 4 \quad 96 &= 2^5 \times 3 \xrightarrow{\alpha_7(96)} 0 \end{aligned}$$

جواب گزینه ۴

اعداد اول هیچ فرم یا نظم به‌خصوصی ندارند. با این حال اگر p عددی اول، به‌جز ۲ و ۳ باشد، به فرم $6k \pm 1$ قابل نوشتن است.

۸۱- اگر p عدد اول دورقمی باشد، باقی‌مانده‌ی $2 + p^2$ بر ۱۲ کدام است؟

صفر (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ

$$\begin{aligned} p &= 6k \pm 1 \xrightarrow{\text{فرم عدد اول}} p^2 = 36k^2 \pm 12k + 1 \\ p^2 + 2 &= 36k^2 \pm 12k + 3 \xrightarrow{\text{فاکتور}} 3(12k^2 \pm 4k + 1) \end{aligned}$$

جواب گزینه ۳

اگر $(a, b) = 1$ باشد، یعنی a و b هیچ عامل مشترکی به‌جز ۱ نداشته باشند، تعداد اعداد اول با فرم $ak + b$ نامتناهی است. ضمناً اگر $(a, b) \neq 1$ باشد، عدد $ak + b$ اول نیست. مگر این‌که جواب به ازای یک k خاص، عددی اول شود؛ مثلاً $6k + 2$ ، اول نیست، آخه مضرب ۲ است! مگر این‌که $k = 0$ گردد!

۸۲- در کدام مجموعه، بی‌نهایت عدد اول وجود دارد؟

۱) $\{x \mid x = 6k + 3, k \in \mathbb{Z}\}$ ۲) $\{x \mid x = 10k + 2, k \in \mathbb{Z}\}$ ۳) $\{x \mid x = 4k + 3, k \in \mathbb{Z}\}$ ۴) $\{x \mid x = 8k + 2, k \in \mathbb{Z}\}$

پاسخ

۱ از ۳ فاکتور می‌ده، ۲ از ۲ و ۴ هم از ۲، اینا عدد اول می‌دن اما محدود! زمانی که به ترتیب، بشن ۲، ۳ و ۴! جواب گزینه ۳

بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م) و کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م)

برای دو عدد صحیح a و b که حداقل یکی از آن‌ها صفر نیست، (a, b) ب.م.م دو عدد a و b تعریف شده و با d نمایش داده می‌شود، هرگاه:

۱) d شمارنده‌ی مشترک a و b باشد: $d \mid a, d \mid b$

۲) d در بین شمارنده‌های مشترک a و b ، از همه بزرگ‌تر باشد: $x \mid a, x \mid b \Rightarrow x \mid d$

ب.م.م دو عدد صحیح، همواره مثبت و ب.م.م دو عدد که هر دو صفر باشند، تعریف نشده است.



◊ برای دو عدد صحیح a و b که حداقل یکی از آن‌ها صفر نیست، $[a, b]$ ک.م.م دو عدد a و b تعریف شده و با c نمایش داده می‌شود، هرگاه:

۱) c مضرب مشترک a و b باشد: $a|c, b|c$

۲) c در بین مضرب‌های مثبت مشترک a و b ، از همه کوچک‌تر باشد: $a|x, b|x \Rightarrow c|x$

◊ ک.م.م دو عدد صحیح هم، همواره مثبت است و برای محاسبه‌ی ک.م.م، این فرمول رو داریم: $[a, b] = \frac{|ab|}{(a, b)}$



وقتی دو عدد a و b به عوامل اول تجزیه شده باشند، ب.م.م آن‌ها می‌شود «عامل‌های اول مشترک با توان کم‌تر».

ک.م.م این دو عدد هم می‌شود «عامل‌های اول مشترک با توان بیشتر و تمام عامل‌های اول غیرمشترک».

۸۳- اگر کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد $A = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$ و B برابر $2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2$ باشد؛ مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد دورقمی ممکن برای B کدام است؟ (آزار ریاضی ۸۷)

۱۷ (۴)

۱۲ (۳)

۱۴ (۲)

۹ (۱)

پاسخ روش اول: کوچک‌ترین مضرب مشترک، می‌شود انتخاب پایه‌های مشترک با توان بزرگ‌تر و تمام غیرمشترک‌ها!

$$A = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 \quad \frac{C = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2}{B = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 2 \\ \beta = 0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 2 \\ \gamma = 2 \\ \theta = 0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{بزرگ‌ترین عدد دورقمی } B} B = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2 = 75$$

که خب جمع ارقامش ۱۲ است. جواب گزینه‌ی ۳

روش دوم: از آن‌جا که عامل 5^2 در ک.م.م حضور دارد پس نتیجه می‌گیریم 5^2 حتماً در B بوده است. حالا تمام مضارب دورقمی ۲۵ رو می‌نویسیم با جمع ارقامشون!

$$\frac{25}{7}, \frac{50}{5}, \frac{75}{12}$$

که از اعداد داده‌شده فقط ۱۲ در گزینه‌ها هست! پس جواب گزینه‌ی ۳

۸۴- اگر کوچک‌ترین مضرب مشترک و بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b به صورت $c = 2^4 \times 7$ و $d = 2^3 \times 7$ باشند، کم‌ترین مقدار $a + b$ چه قدر است؟ (آزار ریاضی ۸۵)

۱۴۰۰ (۴)

۷۰۰ (۳)

۴۴۲۴ (۲)

۱۶۲۴ (۱)

پاسخ چون $d|a$ و $d|b$ ، پس a و b هر دو حداقل، d رو دارند!

$$\begin{cases} \text{ک.م.م } C = 2^4 \times 7^2 \times 11 \\ \text{ب.م.م } d = 2^3 \times 7 \end{cases} \xrightarrow{\text{توضیح بالا}} \begin{cases} a = 2^3 \times 7k \\ b = 2^3 \times 7k' \end{cases} \xrightarrow{C = 2^4 \times 7^2 \times 11} \begin{cases} a = 2^4 \times 7^2 = 784 \\ b = 2^3 \times 7 \times 11 = 616 \end{cases} \xrightarrow{+} a + b = 1400$$

جواب گزینه‌ی ۴

۸۵- دو عدد $A = 2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2$ و $B = 2^5 \times 3^2 \times 5^2 \times 11$ ، دارای ۲۳ مقسوم‌علیه مشترک مثبت و غیر یک می‌باشند. تعداد تمام مقسوم‌علیه‌های مثبت کوچک‌ترین مضرب مشترک این دو عدد، کدام است؟ (ریاضی قارچ از کشور ۹۰)

۷۲۰ (۴)

۵۴۰ (۳)

۴۸۰ (۲)

۳۶۰ (۱)

پاسخ ۲۳ تا مقسوم‌علیه مشترک مثبت و غیر از یک، یعنی ۲۴ مقسوم‌علیه طبیعی برای ب.م.م اونا:

$$\begin{aligned} A &= 2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2 \\ B &= 2^5 \times 3^2 \times 5^2 \times 11 \end{aligned} \xrightarrow{\text{ب.م.م } a < 3} (A, B) = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \xrightarrow{\text{تعداد شمارنده‌ها}} (3+1)(2+1)(2+1) = 24 \Rightarrow a = 1$$

$$\text{تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی } C = 2^5 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2 \times 11 \rightarrow (5+1)(4+1)(3+1)(2+1)(1+1) = 720$$

جواب گزینه‌ی ۴

◊ همیشه $[a, b] | (a, b)$. یعنی «ک.م.م» دو عدد، همیشه بر «ب.م.م» آن‌ها بخش‌پذیر است!

۸۶- اگر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۱۲ باشد، کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها کدام عدد می‌تواند باشد؟ (قارچ از کشور ۸۸)

۱۰۰ (۴)

۶۶ (۳)

۸۴ (۲)

۴۰ (۱)

پاسخ فقط ۸۴ بر ۱۲ بخش‌پذیر! خب «ک.م.م» باید بر «ب.م.م» بخش‌پذیر باشه! جواب گزینه‌ی ۲

ب.م.م عدد a ، که مجهوله! با عدد معلومی مثل ۶، می‌تونه یکی از مقسوم‌علیه‌های طبیعی اون عدد معلوم باشه: ۶ یا ۳ یا ۲ یا ۱ یا $(a, 6)$

روش اول: برای پیدا کردن ب.م.م دو عدد پارامتری، که تنها یک مجهول دارند، می‌تونن یکی از عددها را بنویسن و ریشه‌اش را به جای پارامتر عدد دیگر قرار بدن! این جوری یکی از این دو، عدد معلوم خواهند شد؛ این جوری:

$$(n+3, 2n-5) = (n+3, 2(-3)-5) = (n+3, -11) = 1 \text{ یا } 11$$

$$n+3=0 \Rightarrow n=-3$$

۸۷- اگر n ، عدد طبیعی و دو عدد $9n-5$ و $n+4$ دارای مقسوم‌علیه مشترک غیر از ۱ باشد، تعداد اعداد دورقمی n کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (سراسری ریاضی ۸۵)

$$(n+4, 9n-5) = (n+4, 9(-4)-5) = (n+4, -41) = 1 \text{ یا } 41$$

$$n+4=0 \Rightarrow n=-4$$

پاسخ

$$(n+4, 41) = 41 \Rightarrow n+4=41k \Rightarrow n=41k-4 \xrightarrow[k=1,2]{n \text{ دورقمی است}} n=37, 78$$

جواب گزینه‌ی ۲

اگر دو عددی که برای ب.م.گیری داده شده‌اند، هیچ کدامشان ریشه‌ی صحیح ندارند، باز هم همان کار بالا را انجام بده! یعنی ریشه‌ی یکی را بگذار درون دیگری! فقط عددی که به دست می‌آید، کسری است! که تو صورتش رو نگو می‌داری و مخرجش رو هم می‌گذاری کنار!

$$(2n-1, 3n+1) = (2n-1, 3(\frac{1}{2})+1) = (2n-1, \frac{5}{2}) = (2n-1, 5) = 1 \text{ یا } 5$$

$$2n-1=0 \Rightarrow n=\frac{1}{2}$$

حذف مخرج

۸۸- به ازای چند عدد طبیعی و دورقمی n ، دو عدد به صورت‌های $25n+9$ و $11n+4$ نسبت به هم اول‌اند؟

(۱) ۸۶ (۲) ۸۷ (۳) ۸۹ (۴) ۹۰ (سراسری ریاضی ۸۹)

$$(11n+4, 25n+9) = (11n+4, 25(-\frac{4}{11})+9) = (11n+4, -\frac{1}{11}) \xrightarrow{\text{حذف مخرج}} (11n+4, 1) = 1$$

$$11n+4=0 \Rightarrow n=-\frac{4}{11}$$

پاسخ

این «ب.م.م» همیشه یک است؛ پس تمام اعداد دورقمی قبولن! یعنی ۹۰ تا عدد دورقمی طبیعی همه‌شون! جواب گزینه‌ی ۴

روش دوم: فرض کن بخواهی ب.م.م دو عدد $ra+sb$ و $na+mb$ رو پیدا کنی: اول عدد $|ns-mr|$ رو به دست بیار، حاصل این عدد رو می‌ذارم k ! خب در محاسبه‌ی k ، ضرایب a و b به صورت دور در دور، نزدیک در نزدیک ضرب شده‌اند! بعد هم کمشون کردی:

$$(na+mb, ra+sb) | k(a, b) \text{ در نهایت می‌نویسی: } (na+mb, ra+sb) | k(a, b)$$

۸۹- هرگاه $(a, b) = 5$ باشد، در این صورت $(4a+9b, 3a+7b)$ کدام عدد می‌تواند باشد؟

(۱) فقط ۱ (۲) فقط ۵ (۳) ۳ یا ۵ (۴) ۴ یا ۵

$$(4a+9b, 3a+7b) = d \xrightarrow{k=28-27=1} d | (a, b) \xrightarrow{(a, b)=5} d | 5 \Rightarrow d=1 \text{ یا } 5$$

پاسخ

جواب گزینه‌ی ۴

۹۰- اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی n ، دو عدد $12n+7$ و $5n-2$ نسبت به هم اول نباشند، آن‌گاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد، کدام است؟

(سراسری فارج از کشور ۸۸)

(۱) ۵۹ (۲) ۶۷ (۳) ۸۳ (۴) ۸۹

$$(5n-2, 12n+7) = (5n-2, 12n+7(1)) = d \xrightarrow{k=35-(-24)=59} d | 59(n, 1) \Rightarrow d | 59$$

پاسخ

پس 59 یا $d=1$ بوده، اما چون گفته به ازای برخی n ها، نسبت به هم اول نیستند پس $d=59$ قبوله! جواب گزینه‌ی ۱



۹۱- به ازای برخی از اعداد طبیعی n ، دو عدد به صورت‌های $۱۱n+۷$ و $۹n+۲$ نسبت به هم اول نیستند. کوچک‌ترین مقدار n در این حالت، مضرب کدام است؟ (سراسری خارج از کشور، ۸۹)

$\begin{matrix} ۸ (۴) & ۷ (۳) & ۶ (۲) & ۵ (۱) \end{matrix}$

$(۹n+۲, ۱۱n+۷) = (۹n+۲(۱), ۱۱n+۷(۱)) = d \xrightarrow{k=۶۳-۲۲=۴۱} d | ۴۱ \begin{pmatrix} n, 1 \end{pmatrix} \Rightarrow d | ۴۱$

$\Rightarrow d = ۱ \text{ یا } ۴۱ \xrightarrow[\text{نسبت به هم اول نیستند } d \neq 1]{\text{مضرب ۶ است.}} d = ۴۱ \xrightarrow[\text{هر دو مضرب ۴۱ هستند}]{۱۱n+۷=۴۱k} \xrightarrow[\text{کوچک‌ترین } n]{k=۵} n=۱۸ \Rightarrow$

جواب گزینه‌ی ۲

اگر دو عدد پارامتری داده‌شده، که قراره ب.م.م اونا رو حساب کنی!، هر دو از یه عددی فاکتور می‌داده، حتماً باید اول فاکتور رو بگیری، بعدش روش‌هایی رو که گفتیم اجرا کنی؛ این جوری:

$(۳a+۹, ۶a+۲۱) \xrightarrow{\text{فاکتور از ۳}} ۳(a+۳, ۲a+۷) = ۳ \times ۱ = ۳$

ریشه‌گذاری یا دور در دور!

راستی موقع اعلام جواب نهایی ب.م.م، حواست به عامل‌ها باید باشه! مثلاً ب.م.م دو عدد که هر دوی اونا زوج هستند، نمی‌تونه ۱ باشه ...!!

۹۲- بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $A = ۱۶a+۸$ و $B = ۱۶a+۳۲$ به ازای مقادیر مختلف a با شرط $A, B > ۰$ چند عدد مختلف می‌تواند باشد؟ (آزاد ریاضی، ۸۶)

$\begin{matrix} ۸ (۴) & ۴ (۳) & ۲ (۲) & ۱ (۱) \end{matrix}$

$(۱۶a+۸, ۱۶a+۳۲) \xrightarrow{\text{فاکتور}} ۸(۲a+۱, ۲a+۴) = ۸(۲a+۱(۱), ۲a+۴(۱)) = d \xrightarrow{k=۸-۲=۶} \begin{pmatrix} d, 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} ۸ \text{ بدون } ۸ \end{matrix}$

$\xrightarrow[\text{یا توجه به ضریب ۸ } d=۱۲ \text{ یا } ۲ \text{ یا } ۶]{\text{فاکتور}} (۱۶a+۸, ۱۶a+۳۲) = \begin{cases} ۸ \times ۱ \\ ۸ \times ۲ \\ ۸ \times ۳ \\ ۸ \times ۶ \end{cases}$

پاسخ

اما $۲a+۱$ فرد است و $۲a+۴$ زوج! پس ب.م.م اون دوتا نمی‌تونه ۲ یا ۶ بشه! جواب گزینه‌ی ۲

۹۳- به ازای مقادیر مختلف $a > ۳$ بزرگ‌ترین مقدار بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $(۱۵a+۳)$ و $(۱۵a-۱۲)$ کدام است؟ (آزاد ریاضی صبح، ۹۰)

$\begin{matrix} ۵ (۴) & ۳ (۳) & ۱ (۲) & ۱۵ (۱) \end{matrix}$

$(۱۵a+۳, ۱۵a-۱۲) \xrightarrow{\text{فاکتور}} ۳(۵a+۱, ۵a-۴) = ۳(۵a+۱, ۵(-\frac{1}{5})-۴) = ۳(۵a+۱, -۵) \xrightarrow{۵a+۱ \text{ مضرب ۵ نیست}} ۳ \times ۱ = ۳$

$۵a+۱=۰ \Rightarrow a=-\frac{1}{5}$

پاسخ

جواب گزینه‌ی ۳

اگر $(a, b) = ۱$ باشد، در این صورت دو عدد a و b را نسبت به هم اول می‌گوییم.

اگر $(a, b) = ۱$ باشد، در این صورت a نسبت به خود b و تمام مقسوم‌علیه‌های b اول است. مثلاً $(۳, ۳۰) = ۱$ نتیجه می‌دهد که a مضرب ۲،

۳ و ۵ نیست!

چند خاصیت از ب.م.م و ک.م.م ($n \in \mathbb{N}$ و $k \in \mathbb{Z}$ هستند)

فاکتورگیری از دو عدد	خروج توان از دو عدد	یکی از عددها مضرب دیگری است
$(ka, kb) = k (a, b)$	$(a^n, b^n) = (a, b)^n$	$a b \Rightarrow (a, b) = a $
$[ka, kb] = k [a, b]$	$[a^n, b^n] = [a, b]^n$	$a b \Rightarrow [a, b] = b $



معادله‌ی همبستگی

هر معادله به فرم کلی $ax \equiv b^m$ را معادله‌ی همبستگی خطی می‌گوییم.

۱) شرط لازم و کافی برای آن که معادله‌ی $ax \equiv b^m$ جواب داشته باشد، این است که $(a, m) | b$.

اگر معادله‌ی همبستگی $ax \equiv b^m$ ، شرط $(a, m) | b$ رو داشته باشه، بی‌نهایت جواب صحیح داره وگرنه هم که جواب نداره!

۱۶۶- اگر معادله‌ی $a + 2 \equiv 85x \pmod{17}$ در $\mathbb{Z}$ جواب داشته باشه، در این صورت مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی a کدام است؟

۲۳ (۴)

۲۲ (۳)

۲۱ (۲)

۲۰ (۱)

پاسخ

$$a + 2 \equiv 85x \pmod{17} \xrightarrow{\text{تعریف همبستگی}} a + 2 \equiv 17 | a + 2 \xrightarrow{(85, 17)=17} a + 2 \equiv 85x \pmod{17}$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل به تساوی فرم}} a = 17k - 2 \xrightarrow{\text{بزرگ‌ترین ۳ رقمی}} 17k - 2 < 1000 \Rightarrow k < \frac{1002}{17}$$

$$\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \leq 58 \xrightarrow{\text{در } a} a = 17(58) - 2 = 984 \Rightarrow \text{جمع ارقام} = 21$$

جواب گزینه‌ی ۲

۲) برای حل معادله‌ی همبستگی $ax \equiv b^m$ ، اعداد a و b را با همبستگی‌هایشان به پیمانه‌ی m طوری جایگزین می‌کنیم که پس از تقسیم طرفین همبستگی، ضریب x برابر ۱ شود. وقتی معادله به صورت $x \equiv t \pmod{m}$ درآمد، جواب‌های معادله می‌شود $x = nk + t$! اگر تست، برای جواب‌های معادله شرطی هم گذاشته باشه، خوب بعد از حل، اونو اجرا می‌کنیم!

۱۶۷- تعداد جواب‌های طبیعی و کمتر از ۲۰، معادله‌ی $4x \equiv 2 \pmod{6}$ کدام است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ

$$4x \equiv 2 \pmod{6} \xrightarrow{\div 2} 2x \equiv 1 \pmod{3} \xrightarrow{\text{تبدیل به تساوی فرم بنویس}} x = 3k + 2$$

$$\xrightarrow{\text{طبیعی و کمتر از ۲۰}} 1 \leq 3k + 2 < 20 \Rightarrow \frac{-1}{3} \leq k < \frac{18}{3} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} -1 < k < 6 \xrightarrow{\text{تعداد}} 6 - (-1) - 1 = 6$$

جواب گزینه‌ی ۳

۱۶۸- معادله‌ی همبستگی (پیمانه‌ی ۳۱) $72x \equiv 1 \pmod{31}$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی سه‌رقمی چند جواب دارد؟ (ریاضی خارج از کشور ۹۰)

۳۳ (۴)

۳۲ (۳)

۳۰ (۲)

۲۹ (۱)

پاسخ

$$72x \equiv 1 \pmod{31} \xrightarrow{\div 10} 10x \equiv 1 \pmod{31} \xrightarrow{\div 10} x \equiv -3 \pmod{31} \xrightarrow{\div 10} x \equiv 28 \pmod{31}$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل به تساوی فرم بنویس}} x = 31k - 3 \xrightarrow{\text{طبیعی و سه‌رقمی}} 100 \leq 31k - 3 < 1000 \Rightarrow \frac{103}{31} \leq k < \frac{1003}{31} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 3 < k \leq 32 \xrightarrow{\text{تعداد}} 32 - 3 = 29$$

جواب گزینه‌ی ۱

معادله‌ی سیاله‌ی خطی

۱) فرم کلی معادله سیاله‌ی خطی به صورت $ax + by = c$ می‌باشد.

۲) معادله‌ی $ax + by = c$ در $\mathbb{Z}$ یا جواب ندارد و یا بی‌نهایت جواب دارد. شرط لازم و کافی برای وجود جواب معادله، این است که $(a, b) | c$.

۱۶۹- معادله سیاله‌ی $3x + 6y = a + 5$ به ازای کدام مقدار a جواب دارد؟ (سراسری خارج از کشور ۸۸)

۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

۱۲ (۲)

۱۱ (۱)

پاسخ

$$3x + 6y = a + 5 \xrightarrow{(3, 6)=3} 3 | a + 5 \xrightarrow{a=13} 3 | 18 \quad \checkmark$$

جواب گزینه‌ی ۳

۱۷۰- چند عدد طبیعی برای b ، در مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, 20\}$ ، وجود دارد که معادله سیاله‌ی $24x + b^2y = 4$ جواب‌های صحیح داشته باشد؟

۹ (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴)

پاسخ

$24x + b^2y = 4 \xrightarrow{\text{شرط جواب}} (24, b^2) | 4$ جواب دارد

$$(24, b^2) \xrightarrow{b=4k} (24, 16k^2) = 8$$

خب اگر b مضرب ۴ باشد، جواب نداریم:

$$(24, b^2) \xrightarrow{b=2k} (24, 4k^2) = 3$$

اگر b مضرب ۳ هم باشد، همین‌طور، آخه:

حالا توی مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, 20\}$ اونایی رو انتخاب کن که مضرب ۳ و ۴ نباشن: $\{1, 2, 5, 7, 10, 11, 13, 14, 17, 19\}$ ، شد ۱۰ تا. جواب گزینه‌ی ۲

۳) طریقه‌ی حل معادله سیاله‌ی $ax + by = c$!

روش اول: تو این روش اولش اگر a ، b و c هر سه تایی به عددی ساده می‌شدن این کارومی کنیم. مثلاً: $6x + 9y = 15 \xrightarrow{\div 3} 2x + 3y = 5$

بعدش یه x و y صحیح رو تو ذهنمون طوری حدس می‌زنیم که در معادله صدق کنند، مثلاً: $2x + 3y = 15 \Rightarrow x = 3, y = 3$

اسم اینا رو به ترتیب x_0 و y_0 می‌ذارم. حالا در آخر، فرم کلی جواب‌ها رو این‌جوری می‌نویسی: $\begin{cases} x = x_0 + bk \\ y = y_0 - ak \end{cases}$
 x_0 و y_0 را به ترتیب جلوی x و y گذاشتم، ضریب a و b معادله رو برعکس به صورت « b برای x و a برای y » (!) جلوی x و y با ضریب k قرار دادم، علامت وسط هم که برای x مثبت و برای y همیشه منفی!

بعد از حل معادله، که منظور پیدا کردن جواب‌های کلی معادله برحسب k است، اگر تست شرطی برای x و y داده بود، روی اون فرم کلی، شرط رو اجرا می‌کنیم ...

۱۷۱- معادله سیاله‌ی خطی $7x + 21y = 28$ چند جواب صحیح در بازه‌ی $20 > x, y > -20$ دارد؟

۹ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵ (۱)

پاسخ

$$7x + 21y = 28 \xrightarrow{\text{ساده به } 7} x + 3y = 4 \xrightarrow{\text{حدس}} x_0 = 1, y_0 = 1$$

$$\xrightarrow{\text{جواب‌های کلی}} \begin{cases} x = 1 + (3)k \\ y = 1 - (1)k \end{cases} \xrightarrow{-20 < x, y < 20} \begin{cases} -20 < 1 + 3k < 20 \Rightarrow -7 < k < \frac{19}{3} \\ -20 < 1 - k < 20 \Rightarrow -19 < k < 21 \end{cases} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} -7 < k \leq 6$$

$$\xrightarrow{\cap} -7 < k \leq 6 \xrightarrow{\text{تعداد جواب}} 6 - (-7) = 13$$

جواب گزینه‌ی ۴

۱۷۲- مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی y که در رابطه‌ی $14x + 18y = 10$ صدق کند، کدام است؟

۲۱ (۲) ۲۵ (۳) ۲۳ (۴) ۱۹ (۱)

پاسخ

$$14x + 18y = 10 \xrightarrow{\div 2} 7x + 9y = 5 \xrightarrow{\text{حدس}} 7(2) + 9(-1) = 5 \Rightarrow x_0 = 2, y_0 = -1$$

$$\xrightarrow{\text{جواب‌های کلی}} \begin{cases} x = 2 + 9k \\ y = -1 - 7k \end{cases} \xrightarrow{\text{بزرگ‌ترین سه‌رقمی}} 1000 \geq -1 - 7k > 100 \Rightarrow -1001 < 7k \leq -1001$$

$$\xrightarrow{\div 7} -\frac{1001}{7} < k \leq -\frac{101}{7} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} -143 < k \leq -15$$

$$y_{\max} = -1 - 7(-142) = 993 \Rightarrow \text{جمع ارقام} = 21$$

حالا با فرض $k = -142$ خواهیم داشت:

جواب گزینه‌ی ۲

۱۷۳- مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی x که در معادله‌ی $7x + 13y = 1$ صدق می‌کند، کدام است؟

۹ (۲) ۱۳ (۳) ۷ (۴) ۱۱ (۱)

پاسخ

$$7x + 13y = 1 \xrightarrow{\text{حدس}} 7(2) + 13(-1) = 1 \Rightarrow x_0 = 2, y_0 = -1$$

$$\xrightarrow{\text{جواب‌های کلی}} \begin{cases} x = 2 + 13k \\ y = -1 - 7k \end{cases} \xrightarrow{\text{کوچک‌ترین عدد ۳ رقمی}} 13k + 2 \geq 100 \Rightarrow k \geq \frac{98}{13} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k > 7$$

$$x = 2 + 13(8) = 106 \Rightarrow \text{جمع ارقام} = 7$$

حالا با فرض $k = 8$ خواهیم داشت:

جواب گزینه‌ی ۴



یه حالت خیلی خوب در معادله سیاله‌ی $ax + by = c$ اینه که c مضرب یکی از اعداد a یا b است. این‌جوری، حدس‌زدن خیلی آسون می‌شه! آخه یکی از متغیرها رو می‌شه صفر گذاشت ...

۱۷۴- معادله سیاله‌ی خطی $15x + 14y = 1050$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟ (سراسری ریاضی ۸۰)

۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

پاسخ

$$15x + 14y = 1050 \xrightarrow{15 \mid 1050} 15(70) + 14(0) = 1050 \Rightarrow x_0 = 70, y_0 = 0$$

$$\begin{cases} x = 70 + 14k \\ y = 0 - 15k \end{cases} \xrightarrow{\text{جواب‌های طبیعی}} \begin{cases} 70 + 14k \geq 1 \Rightarrow k \geq -\frac{69}{14} \\ -15k \geq 1 \Rightarrow k \leq -\frac{1}{15} \end{cases} \rightarrow -\frac{69}{14} \leq k \leq -\frac{1}{15}$$

$$\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} -5 < k \leq -1 \xrightarrow{\text{تعداد جواب}} -1 - (-5) = 4$$

جواب گزینه‌ی ۳

۱۷۵- مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی سه‌رقمی x که در معادله‌ی $57x - 87y = 342$ صدق می‌کند، کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۹)

۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

پاسخ

$$57x - 87y = 342 \xrightarrow{\div 3} 19x - 29y = 114 \xrightarrow{19 \mid 114} 19(6) - 29(0) = 114$$

$$\Rightarrow x_0 = 6, y_0 = 0 \xrightarrow{\text{جواب‌های کلی}} \begin{cases} x = 6 + (-29)k \\ y = 0 - (19)k \end{cases}$$

$$x = 6 - 29k \xrightarrow{\text{کوچک‌ترین ۳ رقمی}} 1000 \leq 6 - 29k < 10000 \Rightarrow 29k \leq -94 \Rightarrow k \leq -\frac{94}{29} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \leq -4$$

$$x = 6 - 29(-4) = 122 \Rightarrow \text{جمع ارقام} = 5$$

به ازای $k = -4$ خواهیم داشت:

جواب گزینه‌ی ۱



روش دوم: اگه حدس‌زدن جواب‌های معادله براتون سخت بود یا ضریب‌های a ، b و c این قدر بزرگ بودن که حدس‌زدن و محاسبات طول می‌کشید، اون وقت دو طرف تساوی رو به پیمانه‌ی a یا b به دلخواه در نظر بگیر، هر کدام که خواستی، این‌جوری:

$$ax + by = c \xrightarrow{\text{پیمانه‌ی } b} ax \equiv c \pmod{b} \quad ax + by = c \xrightarrow{\text{پیمانه‌ی } a} by \equiv c \pmod{a}$$

بعد از این کار، یه معادله‌ی همنهشتی با یه مجهول برات می‌مونه، که بلدی حلش کنی! وقتی اون یه متغیر رو برحسب k پیدا کردی، می‌داریش توی معادله سیاله‌ی اصلی و ساده می‌کنی تا اون یکی مجهول هم به دست بیاد! آخر سر هم اگه شرطی برای x و y داشتی اجرا کن ...

۱۷۶- x در معادله سیاله‌ی $7x + 17y = 1000$ صدق می‌کند. باقی‌مانده‌ی x بر ۱۷ کدام است؟ (آزاد ریاضی ۸۷)

۱۵ (۱) ۷ (۲) ۲ (۳) ۸ (۴)

پاسخ

پیمانه رو ۱۷ می‌گیریم و ۱۷ y حذف می‌شه!

$$7x + \boxed{17y} \equiv 1000 \Rightarrow 7x \equiv 1000 \xrightarrow{1000 \equiv 14} 7x \equiv 14 \xrightarrow{\div 7} x \equiv 2 \pmod{17} \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = 2$$

می‌خواهی بدونی ۱۰۰۰ رو به پیمانه‌ی ۱۷، چه‌طوری حساب کردم؟! هر چند روش‌های مختلفی داره! ولی:

$$1000 = 10^3 \equiv (-7)^3 = -\boxed{343} \pmod{17} \Rightarrow 1000 \equiv -343 \pmod{17}$$

جواب گزینه‌ی ۳

۱۷۷- در معادله‌ی $9x + 5y = 113$ چند جواب برای x در بازه‌ی $100 < x < 200$ پیدا می‌شود؟ (قاجار از کشور ۸۷)

۱۵ (۱) ۱۹ (۲) ۲۰ (۳) ۱۹ (۴)

پاسخ

$$9x + 5y = 113 \xrightarrow{\text{پیمانه‌ی } 5} 9x \equiv 113 \pmod{5} \xrightarrow{113 \equiv 3} 9x \equiv 3 \pmod{5} \xrightarrow{\div 4} x \equiv 2 \pmod{5}$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل به تساوی}} x = 5k + 2 \xrightarrow{100 < x < 200} 100 < 5k + 2 < 200 \Rightarrow \frac{98}{5} < k < \frac{198}{5} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 19 < k \leq 39 \xrightarrow{\text{تعداد جواب}} 39 - 19 = 20$$

جواب گزینه‌ی ۴

(آزاد ریاضی عصر ۸۹)

۱۷۸- معادله‌ی $3x + 19y = 500$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی چند دسته‌جواب دارد؟

۹ (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴)

پاسخ

$$3x + 19y = 500 \xrightarrow[\text{حذف } 3x]{\text{پیمانه‌ی ۳}} 19y \equiv 500 \xrightarrow[500 \equiv -1]{19 \equiv 1} y \equiv -1 \xrightarrow{\text{تبدیل به تساوی}} y = 3k - 1$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله}} 3x + 19(3k - 1) = 500 \xrightarrow{\text{ساده}} x = 173 - 19k \xrightarrow{\text{جواب طبیعی}} \begin{cases} 3k - 1 \geq 1 \Rightarrow k \geq \frac{2}{3} \\ 173 - 19k \geq 1 \Rightarrow k \leq \frac{172}{19} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\bigcap_{k \in \mathbb{Z}}} 0 < k \leq 9 \xrightarrow{\text{تعداد جواب}} 9 - 0 = 9$$

جواب گزینه‌ی ۱

(سراسری خارج از کشور ۸۷)

۱۷۹- معادله‌ی $25x + 12y = 1110$ بر روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$) چند زوج جواب دارد؟

۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

پاسخ

$$25x + 12y = 1110 \xrightarrow[\text{حذف } 12y]{\text{پیمانه رو ۱۲ می‌گیریم}} 25x \equiv 1110 \xrightarrow[1110 \equiv 6]{25 \equiv 1} x \equiv 6$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل به تساوی}} x = 12k + 6 \xrightarrow{\text{در معادله اصلی}} 25(12k + 6) + 12y = 1110 \xrightarrow{\text{حل}} y = 80 - 25k$$

$$\xrightarrow{x, y \in \mathbb{N}} \begin{cases} 12k + 6 \geq 1 \\ 80 - 25k \geq 1 \end{cases} \xrightarrow{\bigcap_{k \in \mathbb{Z}}} -1 < k \leq 3 \xrightarrow{\text{تعداد جواب}} 3 - (-1) = 4$$

جواب گزینه‌ی ۲

(سراسری ریاضی ۹۰)

۱۸۰- اگر $357x + 629y = (357, 629)$ باشد، آن‌گاه کوچک‌ترین عدد مثبت $x + y$ کدام است؟

۱۰ (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴)

پاسخ

$$(357, 629) = (17 \times 21, 17 \times 37) = 17 \xrightarrow{\text{در معادله}} 357x + 629y = 17 \xrightarrow{\div 17} 21x + 37y = 1$$

$$\xrightarrow[\text{حذف } 21x]{\text{پیمانه‌ی ۲۱}} 37y \equiv 1 \xrightarrow[1 \equiv -2]{37 \equiv -5} -5y \equiv -2 \xrightarrow[(5, 21) = 1]{\div (-5)} y \equiv 4 \xrightarrow{\text{تبدیل به تساوی}} y = 21k + 4$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله}} 21x + 37(21k + 4) = 1 \xrightarrow{\text{حل}} x = -7 - 37k \xrightarrow{+} x + y = -16k - 3 \xrightarrow[k = -1]{\text{کم‌ترین مقدار}} x + y = 13$$

جواب گزینه‌ی ۳

بعضی موقع‌ها، تست معادله‌ی سیاله رو در قالبِ یه مسئله بهتون می‌ده! این مسئله‌ها دوتا مجهول صحیح نامنفی یا طبیعی دارن! که معمولاً تعدادِ یه چیزهایی هستن! خب تو معادله‌ی سیاله‌ی اونو می‌نویسی از هر کدوم از دوتا روش که خواستی حلش می‌کنی، آخر سر هم، شرطِ متغیرها رو اعمال می‌کنی! که باید این شرط رو از توی متنی تست بفهمی!!

(سراسری ریاضی ۸۱)

۱۸۱- کم‌ترین تعداد تمبر لازم برای بسته‌ای که نیاز به ۸۵۰ ریال تمبر دارد، با تمبرهای ۹۰ و ۵۰ ریالی کدام است؟

۱۴ (۴) ۱۳ (۳) ۱۲ (۲) ۱۱ (۱)

پاسخ

$$90x + 50y = 850 \xrightarrow{\div 10} 9x + 5y = 85 \xrightarrow{\text{حدس}} x_0 = 0, y_0 = 17$$

$$\xrightarrow{\text{جواب‌های کلی}} \begin{cases} x = 0 + 5k \\ y = 17 - 9k \end{cases} \xrightarrow{\text{تعداد تمبر، نمی‌تواند منفی باشد}} \begin{cases} 5k \geq 0 \\ 17 - 9k \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\bigcap_{k \in \mathbb{Z}}} 0 \leq k \leq 1$$

$$\xrightarrow{\text{تعداد کل تمبرهایی که باید بخریم، } x + y \text{ است! پس توجه کن:}} x + y = 17 - 4k \xrightarrow{\text{کم‌ترین}} \begin{cases} k=1 \\ k=0 \end{cases} \rightarrow 13$$

جواب گزینه‌ی ۳

(سراسری ریاضی ۹۱)

۱۸۲- به چند طریق می‌توان با ۳۷۰۰ ریال تمبرهای ۱۵۰ و ۲۵۰ ریالی خرید؟

۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

پاسخ

$$150x + 250y = 3700 \xrightarrow{\div 50} 3x + 5y = 74 \xrightarrow[\text{حذف } 3x]{\text{پیمانه‌ی ۳}} 5y \equiv 74 \xrightarrow[74 \equiv -1]{5 \equiv -1} -y \equiv -1 \Rightarrow y = 3k + 1$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله}} x = 23 - 5k \xrightarrow{x, y \geq 0} \begin{cases} 3k + 1 \geq 0 \\ 23 - 5k \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\bigcap_{k \in \mathbb{Z}}} 0 \leq k \leq 4 \xrightarrow{\text{تعداد جواب}} 4 - 0 + 1 = 5$$

جواب گزینه‌ی ۳



۱۸۳- برای خرید کتابی به قیمت ۷۵۵۰ تومان، به تعداد A بن دوپست تومانی و B بن یکصدوپنجاه تومانی پرداخت نموده‌ایم. حداقل $B + A$ کدام است؟
(سراسری ریاضی فارج از کشور ۸۴)

پاسخ ۳۵ (۱) ۳۶ (۲) ۳۷ (۳) ۳۸ (۴)

$$200A + 150B = 7550 \xrightarrow{\div 50} 4A + 3B = 151 \xrightarrow[\text{حذف } 3B]{\text{پیمانه‌ی ۳}} 4A \equiv 151 \pmod{3} \xrightarrow{\text{تبدیل به تساوی}} A \equiv 1 \pmod{3} \xrightarrow{\text{تبدیل به تساوی}} A = 3k + 1$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله}} B = 49 - 4k \xrightarrow[k \in \mathbb{Z}]{A, B \geq 0} 0 \leq k \leq 12 \xrightarrow[k=12]{B+A=-k+50} -12+50=38$$

جواب گزینه‌ی ۳

پیدا کردن باقی مانده‌ی تقسیم بر اعداد معروف، بدون انجام عمل تقسیم!

فرض کن می‌خواهی باقی‌مانده‌ی عدد $abcde$ رقمی $abcde$ رو به یه عددی مثل ۱۱ پیدا کنی (البته بدون تقسیم!) خُب برای این کار روشی سریع وجود داره. یه جایگزین برای عدد $abcde$ می‌دیم، که تو باقی‌مانده‌ی اونو بر ۱۱ پیدا کنی! در جدول زیر، جایگزینی‌هایی برای باقی‌مانده‌یابی بر اعداد معروف، ارائه شده‌اند:

عدد معروف	جایگزین برای پیدا کردن باقی‌مانده	مدل ریاضی
۱۰ و ۵، ۲	رقم یکان را نگه می‌داریم و آن را به پیمانه‌ی ۵، ۲ و ۱۰ حساب می‌کنیم.	$\overline{abcde} \equiv e \pmod{10, 5, 2}$
۹ و ۳	مجموع ارقام عدد را به پیمانه‌ی ۳ و ۹ حساب می‌کنیم.	$\overline{abcde} \equiv a + b + c + d + e \pmod{9, 3}$
۲۵ و ۴	تنها دو رقم سمت راست عدد را نگه داشته و به پیمانه‌ی ۴ و ۲۵ حساب می‌کنیم.	$\overline{abcde} \equiv \overline{de} \pmod{4, 25}$
۱۱	از سمت راست و به طور یک‌درمیان علامت + و - می‌دهیم.	$\overline{abcde} \equiv a - b + c - d + e \pmod{11}$
۱۳ و ۷	از سمت راست و به‌طور سه‌تا سه‌تا جدا کرده، متناوباً اعداد را جمع و منها می‌کنیم.	$\overline{abcde} \equiv \overline{abc} - \overline{ab} + \overline{cde} \pmod{13, 7}$
۶	(رقم یکان + چهار برابر مجموع بقیه‌ی ارقام) را به پیمانه‌ی ۶ حساب می‌کنیم.	$\overline{abcde} \equiv e + 4(a + b + c + d) \pmod{6}$
۸	تنها ۳ رقم سمت راست را نگه داشته و به پیمانه‌ی ۸ حساب می‌کنیم.	$\overline{abcde} \equiv \overline{cde} \pmod{8}$
۳۷ و ۲۷	از سمت راست و به‌طور سه‌تا سه‌تا جدا کرده و اعداد حاصل را با هم جمع می‌کنیم.	$\overline{abcde} \equiv \overline{ab} + \overline{cde} \pmod{37, 27}$

۱۸۴- باقی‌مانده‌ی عدد ۳۳۴۴۵۵۶ بر ۱۱ چه قدر است؟ (فارج از کشور ۸۶)

پاسخ ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

$$3344556 \equiv 3 - 3 + 4 - 4 + 5 - 5 + 6 = 6 \pmod{11}$$

جواب گزینه‌ی ۳

۱۸۵- مجموع باقی‌مانده‌های تقسیم عدد ۷۳۶۵۲۱ بر ۹، ۸ و ۱۱ چه قدر است؟ (فارج از کشور ۸۳)

پاسخ ۱۳ (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۲ (۴)

$$\left. \begin{array}{l} \text{سه رقم راست} \rightarrow \overline{521} \equiv 1 \pmod{11} \\ \text{جمع ارقام} \rightarrow 7 + 3 + 6 + 5 + 2 + 1 = 24 \equiv 2 \pmod{9} \\ \dots \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 12$$

جواب گزینه‌ی ۳

۱۸۶- چند عدد مضرب ۴ به صورت $\overline{73a0b}$ وجود دارد؟ (فارج از کشور ۸۷)

پاسخ ۱۳ (۱) ۲۷ (۲) ۳۰ (۳) ۱۲ (۴)

$$\overline{73a0b} \equiv 0 \pmod{4} \xrightarrow{\text{دو رقم سمت راست}} \overline{0b} \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow b = 0, 4, 8$$

حالا b ، تا انتخاب داره و a هم ۱۰ تا؛ از ۰ تا ۹ می‌تونه باشه! پس طبق اصل ضرب ۳۰ جواب داریم. جواب گزینه‌ی ۳



گاهی تست دوتا از اعداد معروف بالا را در هم ضرب می‌کند و باقی‌مانده‌ی عدد $\overline{abcde}$ را بر آن می‌خواهد! مثل باقی‌مانده بر ۴۴ یا ۹۹ یا ۳۶ و ... در این صورت کافی است دقت کنی که:
همین‌طور برای بقیه‌ی اعداد! اینو از نتایج اعداد اول یادتونه دیگه ...

$$a \equiv r \Rightarrow a \equiv r, a \equiv r$$

۱۸۷- مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد به صورت $\overline{34xy5}$ که بر ۳۳ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟ (آزار ریاضی ۸۴)

۲۴ (۴)

۲۱ (۳)

۲۷ (۲)

۲۹ (۱)

پاسخ

$$\textcircled{1} \overline{34xy5} \equiv 0 \xrightarrow{\text{جمع ارقام}} \overline{12} + x + y \equiv 0 \Rightarrow x + y \equiv 0 \Rightarrow x + y = 3 \text{ است!}$$

$$\textcircled{2} \overline{34xy5} \equiv 0 \xrightarrow{\dots + \dots} +3 - 4 + x - y + 5 \equiv 0 \Rightarrow x - y \equiv -4 \Rightarrow x - y = 7$$

آخه اگه $x - y = 7$ نباشه، جواب بعدش ۱۸ است $\overline{711}$ ، خب تفاضل دو رقم هم که ۱۸ نمی‌شه!! حالا برای این‌که جمع x و y مضرب ۳ باشه و تفاضلشون هم ۷ و در ضمن بزرگ‌ترین عدد هم به دست بیاد، حالت $x = 8$ و $y = 1$ را می‌گیریم.

$$\overline{34xy5} \xrightarrow{x=8, y=1} 34815 \Rightarrow \text{جمع ارقام} = 21$$

جواب گزینه‌ی ۳

۱۸۸- اگر عدد طبیعی پنج‌رقمی $\overline{5abb6}$ بر عدد ۹۹ بخش‌پذیر باشد، رقم b کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۷)

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

پاسخ

$$\textcircled{1} \overline{5abb6} \equiv 0 \xrightarrow{\text{جمع ارقام}} 5 + a + 2b + 6 \equiv 0 \Rightarrow a + 2b \equiv -11$$

۷ به پیمانه‌ی ۹

$$\textcircled{2} \overline{5abb6} \equiv 0 \xrightarrow{\dots + \dots} 5 - a + b - b + 6 \equiv 0 \Rightarrow a \equiv 11 \xrightarrow{a \text{ رقم است!}} a = 0$$

$$\xrightarrow{a+2b \equiv 7} 2b \equiv 7 \Rightarrow 2b \equiv 16 \Rightarrow b \equiv 8 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow 2b \equiv 16 \Rightarrow 2b \equiv 7 + 9 \Rightarrow 2b \equiv 16 \Rightarrow b = 8$$

جواب گزینه‌ی ۴

۱۸۹- چند عدد به صورت $\overline{51xy32}$ بر ۳۶ بخش‌پذیر است؟ (آزار ریاضی ۸۶)

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

پاسخ

$$\textcircled{1} \overline{51xy32} \equiv 0 \xrightarrow{\text{دو رقم سمت راست}} 32 \equiv 0 \quad \checkmark$$

$$\textcircled{2} \overline{51xy32} \equiv 0 \xrightarrow{\text{جمع ارقام}} x + y + 11 \equiv 0 \Rightarrow x + y \equiv 7 \Rightarrow x + y = 7 \text{ یا } 16$$

-۷ به پیمانه‌ی ۹

پس x و y می‌تونن اینا باشن: $(0, 7) - (1, 6) - (2, 5) - (3, 4) - (8, 8) - (9, 7)$ با برعکس‌هاشون (!) ۱۱ حالت! جواب گزینه‌ی ۴

۱۹۰- اگر یک عدد چهاررقمی به صورت $\overline{a7 \circ b}$ مضرب ۴۴ باشد، ولی مضرب ۵۵ نباشد، آن‌گاه $a + b$ کدام است؟ (سراسری خارج از کشور ۸۸)

۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

۱۲ (۲)

۱۱ (۱)

پاسخ

$$\textcircled{1} \overline{a7 \circ b} \equiv 0 \xrightarrow{\text{دو رقم سمت راست}} \overline{7 \circ} \equiv 0 \Rightarrow b = 0, 4, 8$$

$$\textcircled{2} \overline{a7 \circ b} \equiv 0 \xrightarrow{\dots + \dots} -a + 7 - 0 + b \equiv 0 \Rightarrow b - a \equiv -7 \Rightarrow b - a = 11k + 4 \xrightarrow{b \text{ و } a \text{ رقم اند!}} b - a = 4$$

۴ به پیمانه‌ی ۱۱

$$\textcircled{3} \overline{a7 \circ b} \equiv 0 \xrightarrow{\overline{a7 \circ b} \equiv 0} \overline{a7 \circ b} \not\equiv 0 \Rightarrow b \neq 0, 5$$

از همه‌ی اینا می‌شه فهمید که $b = 8$ و $a = 4$ پس $a + b = 12$ راستی $a = 0$ و $b = 4$ غلطه، چون رقم سمت چپ عدد ماست! جواب گزینه‌ی ۲

کاربرد همنهشتی در تعیین تاریخ روزهای جلوتر!

مسئله‌ی از قبیل روز، هفته، ساعت و ماه که حالت گردشی دارند (با تناوب خاصی دوباره از نو شروع می‌شوند و با افزودن عددی ثابت، به وضعیت و شرایط قبلی برمی‌گردند)، به عنوان مثال‌هایی عملی از همنهشتی هستند.

در این حالت فاصله‌ی موردنظر (معمولاً روزهایی که بین دو تاریخ مشخص قرار می‌گیرند) را به پیمانه‌ی این عدد ثابت (برای ایام هفته ۷، ماه‌های سال ۱۲، فصل‌ها ۴ و ...) حساب می‌کنیم.



۱۹۱- اگر دوازدهم اردیبهشت (روز معلم) یک سال شمسی دوشنبه باشد، سوم شهریور (تولد مؤلف!) همان سال چه روزی خواهد بود؟

- (۱) دوشنبه (۲) سه‌شنبه (۳) چهارشنبه (۴) پنج‌شنبه

پاسخ بینم از ۱۲ اردیبهشت تا سوم شهریور، چند روز هست، راستی بهتره خود ۱۲ اردیبهشت رو حساب نکنی و سوم شهریور رو به حساب بیاری!

$$\begin{array}{c} \text{تا سوم شهریور} \\ \boxed{19} + \boxed{3 \times 31} + \boxed{3} \equiv 5 + \boxed{3 \times 3} + 3 \equiv 3 \end{array}$$

خرداد، تیر و تا پایان اردیبهشت مرداد

جواب که شد ۳، یعنی از دوشنبه، ۳ روز بشمر برو جلو، حواست باشه خود دوشنبه حساب نیست درست مثل ۱۲ اردیبهشت که حسابش نکردیم! می‌شه پنج‌شنبه. جواب گزینه‌ی **۴**

۱۹۲- اگر بیست‌ودوم بهمن یک سال شمسی جمعه بوده باشد، ۲۹ خرداد همان سال (رحلت دکتر شریعتی) چه روزی بوده است؟

- (۱) یک‌شنبه (۲) چهارشنبه (۳) پنج‌شنبه (۴) شنبه، مهر، آبان، آذر و دی

$$\boxed{2} + \boxed{3 \times 31} + \boxed{4 \times 30} + \boxed{22} \equiv 2 + \boxed{3 \times 3} \times \boxed{4 \times 2} + 1 \equiv 6$$

تیر، مرداد و تا پایان شهریور خرداد تا ۲۲ بهمن ۲ ۱

حالا که تاریخی در بهمن رو داده و خرداد رو خواسته، که یعنی رفته عقب (!) پس تو هم از جمعه، شش روز برو عقب، بدون حساب کردن خود جمعه می‌شه شنبه. جواب گزینه‌ی **۴**

قضیه‌ی بزرگ فرما!



معادله‌ی $x^n + y^n = z^n$ به‌جز حالتی که $n = 2$ است و اعداد فیثاغورسی در آن صدق می‌کنند، برای n های دیگر جواب غیربدیهی صحیح ندارد. جواب غیربدیهی یعنی جوابی که در آن، هیچ‌یک از متغیرهای x ، y و z صفر نباشند!

۱۹۳- معادله‌ی $x^{1389} + y^{1389} = z^{1389}$ چند جواب طبیعی دارد؟

- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۱۳۸۹ (۴) ۱۳۹۰

پاسخ قضیه‌ی بزرگ فرماست! بزرگ‌ترین اثبات ریاضی قرن ما، توسط «اندرو وایلز». جواب گزینه‌ی **۱**