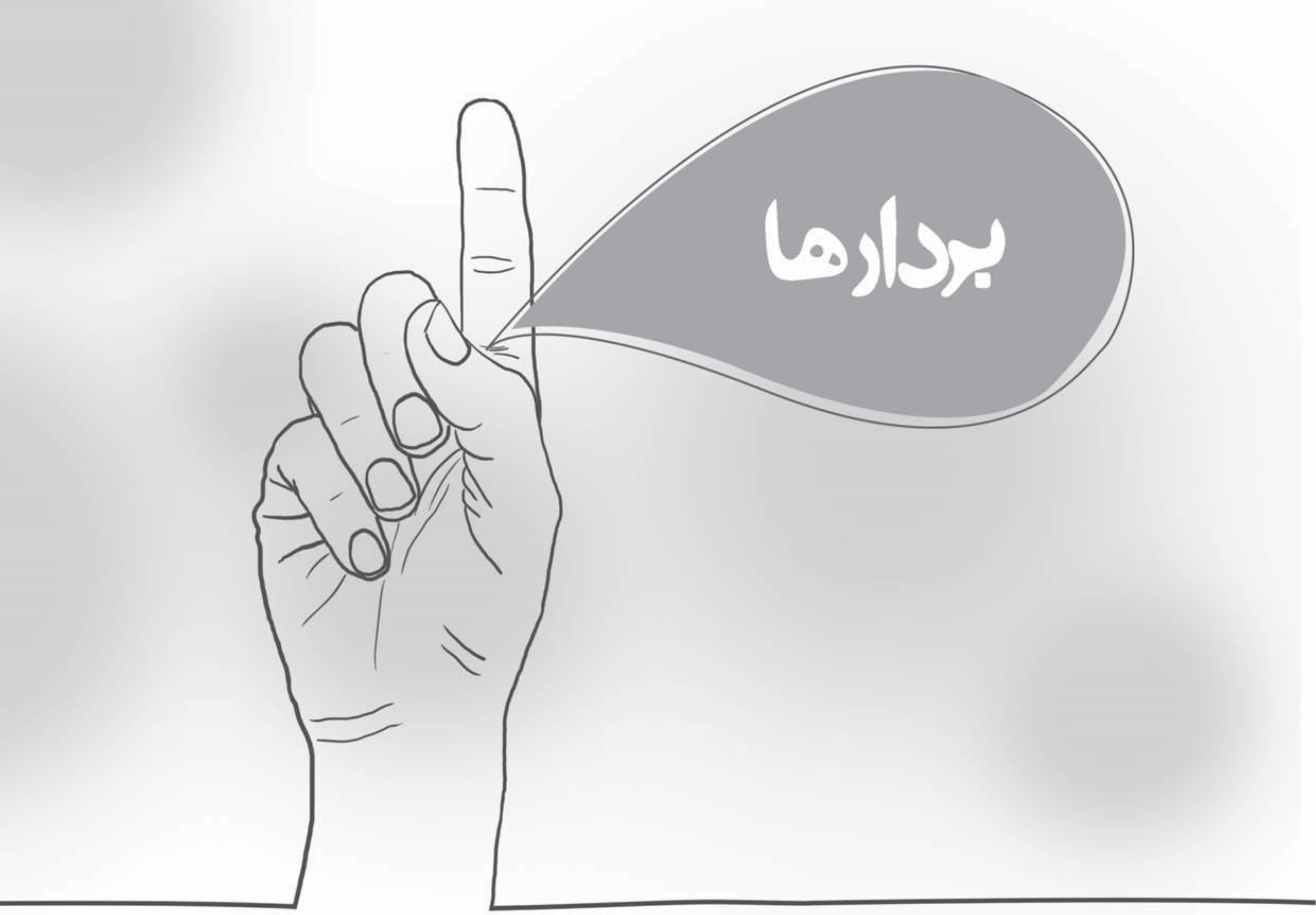
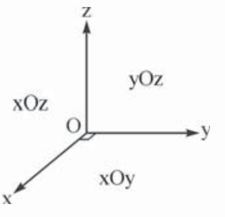


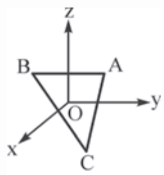
● دستگاه مختصات سه‌بعدی، از سه محور دوبه‌دو عمود بر هم، به نام‌های محور x ها، محور y ها و محور z ها (یا Ox، Oy و Oz) تشکیل شده است. محل تلاقی این سه محور را O، مبدأ مختصات، می‌نامیم: $O=(\circ,\circ,\circ)$. این دستگاه هم‌چنین سه صفحه به نام‌های xOy، xOz و yOz نیز دارد: آن‌ها هم دوبه‌دو بر هم عمودند! مختصات هر نقطه در این دستگاه، با یک سه‌تایی مرتب معرفی می‌شود، مؤلفه‌ی هر نقطه را به ترتیب طول، عرض و ارتفاع نقطه می‌گوییم؛ مثل: $M=(-۲,۳,۴)$

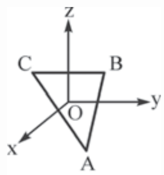
● محور x ها، y ها و z ها، هر کدام، دارای راستا و جهت هستند. در دستگاه مختصات سه‌بعدی ۸ ناحیه وجود دارد.
معمولاً شکل دستگاه مختصات فضایی را در حالتی که x، y و z مثبت‌اند، به صورت مقابل می‌کشیم:

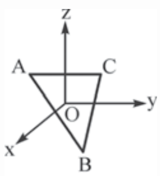


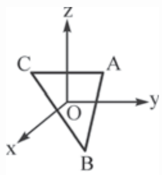
● برای نشان‌دادن نقطه‌ی $A=(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ در دستگاه مختصات، به صورت زیر عمل می‌کنیم:
از O به اندازه‌ی $x_\circ$ و در راستای محور x ها (و با توجه به علامت آن) حرکت می‌کنیم، بعد از همان‌جا، به اندازه‌ی $y_\circ$ در راستای محور y ها، یا به راست یا به چپ (برحسب علامت y) حرکت می‌کنیم، در آخر هم به اندازه‌ی $z_\circ$ در راستای محور z ها!

۱- نقطه‌های $A=(۲,۳,۴)$، $B=(-۱,-۲,۲)$ و $C=(۳,۲,-۱)$ رأس‌های مثلثی هستند. این مثلث در دستگاه مختصات به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

● نقطه‌ای را که روی محورها یا صفحه‌های مختصات قرار بگیرد، «نقطه‌ی خاص» می‌گوییم. در این جور نقطه‌ها، حداقل یک مؤلفه‌ی صفر وجود دارد. اگر نقطه‌ای، یک مؤلفه‌ی صفر داشته باشد، روی یکی از صفحه‌های مختصات قرار دارد، برای فهمیدن اسم این صفحه، از سه متغیر x، y و z، متغیری را که صفر است، نخوانید!

این‌جوری:

$A=(a,b,0)$	$A=(a,0,c)$	$A=(0,b,c)$
روی صفحه‌ی xy	روی صفحه‌ی xz	روی صفحه‌ی yz

هم‌چنین اگر نقطه‌ای دو مؤلفه‌ی صفر داشته باشد، روی یکی از محورهای مختصات قرار گرفته است. برای فهمیدن اسم این محور، دو متغیری که صفر هستند، را نخوانید! این‌جوری:

$A=(0,0,c)$	$A=(0,b,0)$	$A=(a,0,0)$
روی محور z ها	روی محور y ها	روی محور x ها

۲- نقطه‌ی $A=(n^3-n,1,2n-1)$ روی صفحه‌ی yOz و نقطه‌ی $B=(m-3,2m,n^2+3n+2)$ روی محور y ها قرار دارند. مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲- ۴) ۲

اگر $A=(x_1,y_1,z_1)$ و $B=(x_2,y_2,z_2)$، دو نقطه در فضا باشند، فاصله‌ی بین این دو نقطه، یا طول پاره‌خط AB، برابر است با:

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

۳- نقطه‌ای از محور z ها که به فاصله‌ی ۶ از نقطه‌ی $A=(2,4,-1)$ قرار دارد، کدام است؟

۱) $(0,0,5)$ ۲) $(0,0,-3)$ ۳) $(0,0,-5)$ ۴) $(0,1,3)$

فاصله‌ی نقطه‌ی $A=(x_0,y_0,z_0)$ تا مبدأ مختصات می‌شه $\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$. خب مبدأ $O=(0,0,0)$ است و $|OA|$ هم می‌شه همین دیگه!

۴- فاصله‌ی نقطه‌ی $A=(m,-2m,2m)$ تا مبدأ مختصات، برابر ۹ است. مجموع مؤلفه‌های نقطه‌ی $B=(m-2,m+1,3m)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۴- ۲) ۱۶- ۳) ۲۴ ۴) ۱۶

تصویر نقطه‌ی $A=(a,b,c)$ روی محورها و صفحه‌های مختصات:

تصویر روی صفحه‌ی yz	تصویر روی صفحه‌ی xz	تصویر روی صفحه‌ی xy	تصویر روی محور z ها	تصویر روی محور y ها	تصویر روی محور x ها
$A'=(0,b,c)$	$A'=(a,0,c)$	$A'=(a,b,0)$	$A'=(0,0,c)$	$A'=(0,b,0)$	$A'=(a,0,0)$

برای تصویرکردن یک نقطه روی هر محور یا صفحه‌ی مختصات، به جای متغیری که اسمش نیومده، صفر بذارید و به بقیه‌ی متغیرها هم دست نزنید!

۵- اگر نقطه‌ی B، تصویر نقطه‌ی $A=(3,5,1)$ روی محور Oy و نقطه‌ی C تصویر نقطه‌ی A روی صفحه‌ی xOz باشد، در این صورت طول پاره‌خط BC کدام است؟

۱) $\sqrt{10}$ ۲) $\sqrt{34}$ ۳) $\sqrt{26}$ ۴) $\sqrt{35}$

قرینه‌ی نقطه‌ی $A=(a,b,c)$، نسبت به محورهای مختصات، این‌جوری می‌شه:

قرینه نسبت به محور z ها	قرینه نسبت به محور y ها	قرینه نسبت به محور x ها
$A''=(-a,-b,c)$	$A''=(-a,b,-c)$	$A''=(a,-b,-c)$

نقطه رو نسبت به هر محوری که خواستی قرینه کنی، متغیری که اسمش نیومده رو در یه منفی ضرب کن! یعنی یه منفی ضرب کن در متغیری که نیست و به بقیه‌ی متغیرها هم کاری نداشته باش!

۶- هرگاه $A=(1,2,-3)$، $B=(-1,2,4)$ و A_1 قرینه‌ی A نسبت به محور x ها و B_1 تصویر B روی صفحه‌ی xOy باشند، فاصله‌ی A_1 تا B_1 چه‌قدر است؟

۱) $\sqrt{10}$ ۲) $\sqrt{17}$ ۳) $\sqrt{24}$ ۴) $\sqrt{29}$

● قرینه‌ی نقطه‌ی $A=(a,b,c)$، نسبت به صفحات مختصات:

قرینه نسبت به صفحه‌ی xOy	قرینه نسبت به صفحه‌ی xOz	قرینه نسبت به صفحه‌ی yOz
$A''=(a,b,-c)$	$A''=(a,-b,c)$	$A''=(-a,b,c)$

یعنی منفی رو ضرب کن در متغیری که اسمش نیومده است!

۷- قرینه‌ی نقطه‌ی $A=(a,2,1-a)$، نسبت به محور xها تا نقطه‌ی $B=(-2,-1,a+1)$ فاصله‌ای برابر $\sqrt{5}$ دارد. مجموع مؤلفه‌های قرینه‌ی نقطه‌ی $C=(-a,\frac{a}{2},1)$ نسبت به صفحه‌ی xOz کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴− ۳) ۲− ۴) ۴

پیداکردن معادله‌ی مکان هندسی در هندسه‌ی تحلیلی، خیلی ساده است: به جای کلمات «مکان هندسی نقاطی در فضا که ...» بذارید $M=(x,y,z)$، بعدش شرطی رو که تست گفته، واسه نقطه‌ی M اجرا کنید تا یه رابطه بین x، y و z به دست بیاد! راستی اگه «مکان هندسی نقاطی در صفحه ...» بود، باید $M=(x,y)$ بگیری!

۸- معادله‌ی مکان هندسی نقاطی از فضا که به فاصله‌ی $\sqrt{5}$ از نقطه‌ی $P=(-1,-2,1)$ قرار دارند، کدام است؟

۱) $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z+1=0$
۲) $x^2+y^2+z^2+2x+4y+2z+1=0$
۳) $x^2+y^2+z^2+2x+4y-2z+1=0$
۴) $x^2+y^2+z^2+2x+4y-2z=1$

● برای پیداکردن فاصله‌ی نقطه‌ی $A=(a,b,c)$ تا محورهای مختصات، به صورت زیر عمل کنید:

فاصله تا محور xها	فاصله تا محور yها	فاصله تا محور ها
$\sqrt{b^2+c^2}$	$\sqrt{a^2+c^2}$	$\sqrt{a^2+b^2}$

خب، می‌دونی که فاصله‌ی A تا مبدأ می‌شه $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$! حالا تو برای فاصله‌ی نقطه تا محورها، فقط متغیرهایی رو که اسمشون نیومده (!) تو این فرمول بنویس ...

۹- فاصله‌ی نقطه‌ی $A=(\alpha,\beta,3\alpha)$ از محور xها، دو برابر فاصله‌ی آن از محور zهاست. در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱) $\alpha=\beta=0$ ۲) $5\alpha^2=3\beta^2$ ۳) $5\alpha^2=3\beta$ ۴) $3\alpha^2=5\beta^2$

● فاصله‌ی نقطه‌ی $A=(a,b,c)$ تا صفحه‌های مختصات: (قدرمطلقِ متغیری که اسمش نیومده!)

فاصله تا صفحه‌ی xOy	فاصله تا صفحه‌ی yOz	فاصله تا صفحه‌ی xOz
$\|c\|$	$\|a\|$	$\|b\|$

۱۰- فاصله‌ی نقطه‌ی $A=(-2,4,m-1)$ تا صفحه‌ی xOy، برابر ۳ است. در این صورت فاصله‌ی نقطه‌ی $B=(2m-1,2,m^2-1)$ تا صفحه‌ی yOz کدام است؟ $(m<0)$

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۴

● اگر مختصات سه نقطه در فضا داده شده باشد و نوع مثلثِ حاصل با آن سه نقطه، خواسته شود، طول سه ضلع مثلث را بیابید: هر سه مساوی بود، متساوی‌الاضلاع است، دوتا مساوی، یعنی متساوی‌الساقین. اگر در رابطه‌ی فیثاغورس صدق کنند، قائم‌الزاویه هم خواهد بود.

۱۱- نقطه‌های $A=(5,1,5)$، $B=(4,3,2)$ و $C=(-3,-2,1)$ رأس‌های یک مثلث‌اند. این مثلث چه نوع مثلثی است؟

۱) متساوی‌الساقین ۲) متساوی‌الاضلاع ۳) قائم‌الزاویه ۴) قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین

● چند ویژگی از طول (اندازه):

۱ $|AB|=|BA|$؛ جابه‌جایی!

۲ $|AB|=0 \Leftrightarrow A=B$، یعنی اگه نقطه‌ی A روی B باشه، طول پاره‌خط صفر می‌شه! فقط همین یه حالته!

۳ $|AC|\le|AB|+|BC|$، وقتی A، B و C روی یه خط راست باشند، $|AB|+|BC|=|AC|$ و وگرنه علامت بزرگ‌تر برقرار می‌شه، که خب نامساوی حمار خودمونه!

۱۲- اگر $A=(۳,۲,۲)$ و $B=(۱,۰,۱)$ دو نقطه در فضا بوده و C نیز دلخواه باشد، مینیمم مقدار $|AC|+|BC|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

اگر نقطه‌ی M، وسط پاره‌خط AB باشد، در این صورت مختصات نقطه‌ی M به صورت زیر خواهد بود.

$$M=(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲},\frac{z_A+z_B}{۲})$$

این‌جوری یادتون باشه بهتره: $M=\frac{A+B}{۲}$!

تعجب نکنید؛ جمع دوتا نقطه‌ی A و B به صورت مؤلفه به مؤلفه انجام می‌شه، بعدش هم تمام مؤلفه‌ها تقسیم بر ۲ ...

۱۳- اگر $A=(۱,-۲,-۱)$، $B=(۱,۲,m)$ و $C=(۳,۲,۲)$ رئوس مثلث ABC بوده و طول میانه‌ی CM در این مثلث، ۳ باشد، در این صورت فاصله‌ی نقطه‌ی B تا مبدأ کدام می‌تواند باشد؟

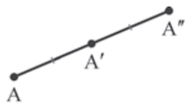
۱) $۲\sqrt{۶}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۱۳}$ ۴) $۳\sqrt{۶}$

اگر نقطه‌ی D، روی پاره‌خط AB قرار داشته باشد به طوری که $\overrightarrow{AD}=\frac{m}{n}\overrightarrow{BD}$ (میگن D پاره‌خط AB را به نسبت معلوم $\frac{m}{n}$ تقسیم کرده!)؛

بنویسید $n\overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{BD}$ و بعدش $D=\frac{nA-mB}{n-m}$، اینم یعنی پیداکردنِ D ...

۱۴- نقاط $A=(-۱,-۱,۲)$، $B=(-۱,-۶,۲)$ و M در رابطه‌ی $۳\overrightarrow{MA}=۲\overrightarrow{BM}$ صدق می‌کنند. مختصات M کدام است؟

۱) $(-۱,-۱,۲)$ ۲) $(-۱,-۳,۲)$ ۳) $(-۱,۳,-۲)$ ۴) $(-۳,-۱,۲)$



اگر بخواهید قرینه‌ی نقطه‌ی A را نسبت به نقطه‌ی A' به دست بیاورید، از A به A' وصل می‌کنید و به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهید. در هندسه‌ی تحلیلی برای یافتن A''، یعنی همان نقطه‌ی قرینه، بنویسید $A''=۲A'-A$.

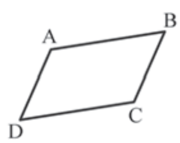
۱۵- قرینه‌ی نقطه‌ی $A=(-۱,۲,۳)$ نسبت به نقطه‌ی $(-۲,-۱,۱)$، نقطه‌ی B است. مجموع مؤلفه‌های B کدام است؟

۱) -۸ ۲) -۷ ۳) -۶ ۴) -۴

اگر A، B و C سه رأس مثلث ABC در فضا باشند، در این صورت مختصات نقطه‌ی همرسی میانه‌ها، که مرکز ثقل مثلث می‌باشد، از این رابطه به دست میاد: $G=\frac{A+B+C}{۳}$

۱۶- $A=(۳,-۱,۴)$، $B=(۱,m,۶)$ و $C=(۲,۳,n)$ مختصات سه رأس مثلث ABC و $G=(۲,۱,۷)$ محل تلاقی سه میانه‌ی آن است. حاصل $۴m-n$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۴ ۳) -۷ ۴) -۱۱



اگر A، B، C و D چهار رأس متوالی از یک متوازی‌الاضلاع باشند، اون‌وقت $A+C=B+D$، یعنی جمع رئوس روبه‌رو با هم مساوی است.

اصلاً براساسِ اسم متوازی‌الاضلاع، این‌جوری جمع کن: اولی و سومی مساوی با دومی و چهارمی!

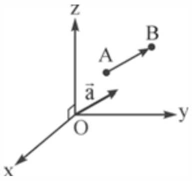
۱۷- $A=(۵,-۱,۰)$، $C=(a+b,-۳a-۶b,۵)$، $B=(۴,۶,۳)$ و $D=(۳,-۴,۲)$ رئوس متوازی‌الاضلاع ABCD هستند. مقدار ab کدام است؟

۱) -۱۲ ۲) ۱۵ ۳) -۱۵ ۴) ۱۲

۱۸- هرگاه $M=(-۲,۳,۱)$، $N=(۲,-۲,۶)$ و $P=(۰,-۱,۲)$ و Q چهار رأس متوازی‌الاضلاع MNPQ باشند، مجموع فواصل نقطه‌ی Q از سه محور مختصات، کدام است؟

۱) $۱۰+۸\sqrt{۲}$ ۲) ۱۴ ۳) $۱۰+۴\sqrt{۲}$ ۴) ۱۶

● بردار، از نظر هندسی یک پاره‌خط جهت‌دار است (که معمولاً شروعش را مبدأ مختصات می‌گیریم).



اما از نظر تحلیلی، بردار یک سه‌تایی مرتب است؛ بردارها را با حروف کوچک نمایش می‌دهیم؛ مثل $\vec{a}=(۲,-۱,۳)$.

سه‌تایی داده‌شده برای بردار مختصات نقطه‌ی انتهایی آن است، ابتدای آن هم که مبدأ است. یعنی $\overrightarrow{OA}=\vec{a}=(۲,-۱,۳)$!

اگر A ابتدا و B انتهای پیکان $\overrightarrow{AB}$ باشد، بردار موازی، مساوی و هم‌جهت با $\overrightarrow{AB}$ را به صورت $\overrightarrow{AB}=B-A$ به دست می‌آوریم و $\vec{a}$ می‌نامیم. بنابراین معلوم می‌شه $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$!

۱۹- اگر پیکان $\overrightarrow{AB}$ با بردار $\vec{a}=(۱,-۱,۳)$ هم‌ارز بوده و $A=(۲,۱,-۵)$ باشد، در این صورت مختصات نقطه‌ی B کدام است؟

۱) $(-۱,-۲,۸)$ ۲) $(۳,۰,-۲)$ ۳) $(۱,۲,-۸)$ ۴) $(-۳,۰,۲)$

۲۰- فرض کنید $A=(۲,۰,-۱)$، $B=(۲,-۵,۴)$ و $۲\overrightarrow{AM}+۳\overrightarrow{BM}=۳\overrightarrow{AB}$. در این صورت مختصات M کدام است؟

۱) $(-۲,-۶,-۵)$ ۲) $(-۲,۶,-۵)$ ۳) $(۲,۶,۵)$ ۴) $(۲,-۶,۵)$

طول بردار $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$، برابر است با $|\vec{a}|=\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲}$. خب فاصله تا مبدأست دیگه!

۲۱- به ازای کدام مقدار m، طول بردار $\vec{a}=(۲,m-۱,-m)$، برابر ۳ است؟

۱) $-۱,۲$ ۲) $۱,-۲$ ۳) $۱,۲$ ۴) $-۲,-۱$

● وضعیت مؤلفه‌های برداری که بر محورها یا صفحه‌های مختصات عمود است، به صورت زیر می‌باشد($\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$):

عمود بر محور x ها	**عمود بر محور y ها**	**عمود بر محور z ها**	**عمود بر صفحه‌ی xOy**	**عمود بر صفحه‌ی yOz**	**عمود بر صفحه‌ی xOz**
$\vec{a}=(۰,a_۲,a_۳)$	$\vec{a}=(a_۱,۰,a_۳)$	$\vec{a}=(a_۱,a_۲,۰)$	$\vec{a}=(۰,۰,a_۳)$	$\vec{a}=(a_۱,۰,۰)$	$\vec{a}=(۰,a_۲,۰)$

این‌جوری فکر کن: بردار بر هر محور یا صفحه‌ای که عمود باشد، متغیرهای همنام محور (یا صفحه) در بردار صفر هستند!

● اگر بردار بر محوری عمود باشد، با صفحه‌ی عمود بر آن محور موازی است؛ مثلاً بردار عمود بر محور y ها، با صفحه‌ی xOz موازی است.

۲۲- اگر بردار $\vec{a}=(۲m-۴,۲m,۳)$ بر محور x ها عمود باشد، طول بردار a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۳- اگر بردار $\vec{a}=(m-۲,m+n,۱-m)$ با محور Ox موازی باشد، حاصل $۲m-n$ کدام است؟

۱) ۱− ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

● دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را مساوی می‌گوییم، هرگاه مؤلفه‌های نظیر آن‌ها، برابر باشند، این‌جوری که اگر $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$، اون‌وقت:

$\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow (a_۱=b_۱\ ,\ a_۲=b_۲\ ,\ a_۳=b_۳)$

از نظر هندسی هم، دو بردار را که هم‌راستا، هم‌جهت و هم‌اندازه باشند، مساوی می‌گویند ...

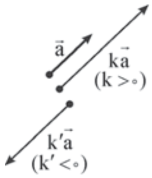
۲۴- اگر $A=(۲,۰,-m)$ و $B=(-۲m,n-۲,-۱)$ بوده و $\vec{u}=(n-۱,-۲m-۱,n-۵)$ و داشته باشیم $\overrightarrow{BA}=\vec{u}$، در این صورت مقدار mn کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۵− ۴) ۶−

اگر $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ یک بردار بوده و k نیز عددی حقیقی باشد، $k\vec{a}$ را ضرب عدد در بردار می‌گوییم. از نظر تحلیلی، k در تک‌تک مؤلفه‌های بردار $\vec{a}$، ضرب می‌شود، این‌جوری: $k\vec{a}=(ka_۱,ka_۲,ka_۳)$!

۲۵- هرگاه $\vec{a}=(m+۱,n,p-۱)$ و $\vec{b}=(۶n,۲m+n,۱-n)$ و نیز $\vec{b}=۳\vec{a}$ است. در این صورت $m+n+p$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱



از نظر هندسی، بردار $k\vec{a}$ همواره با $\vec{a}$ موازی است و چنانچه $k>0$ باشد، $k\vec{a}$ با $\vec{a}$ هم‌جهت نیز می‌باشد. در صورتی که $k<0$ باشد، $k\vec{a}$ با $\vec{a}$ غیرهم‌جهت است ولی هنوز موازی‌اند!

۲۶- زاویه‌ی بین بردارهای $\frac{\vec{a}}{|\vec{b}|}$ و $|\vec{a}|\vec{a}$، در کدام بازه قرار می‌گیرد؟

۱) $[0,\frac{\pi}{3})$ ۲) $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$ ۳) $[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3})$ ۴) $[\frac{2\pi}{3},2\pi)$

طول بردار $k\vec{a}$، $|k|$ برابر اندازه‌ی $\vec{a}$ می‌باشد. یعنی $|k\vec{a}|=|k||\vec{a}|$.

رابطه‌ی بالا یه دیدگاه تستی داره! عدد رو می‌تونی وقتی تو بردار ضرب شده، به صورت مثبت، از اندازه خارجش کنی ...!

۲۷- اگر $|\vec{a}|\vec{a}||=4$ باشد، اندازه‌ی بردار $-\frac{1}{2}\vec{a}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۸

در ضرب «عدد در بردار» (همون $k\vec{a}$ خودمون!) چنانچه $k=-1$ فرض شود، بردار $-\vec{a}$ ساخته می‌شود. این بردار قرینه‌ی $\vec{a}$ نامیده می‌شود. $-\vec{a}$ هم‌اندازه و موازی $\vec{a}$ است ولی در خلاف جهت $\vec{a}$. یعنی: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{o}$! راستی $\vec{o}=(0,0,0)$ است!

۲۸- دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در رابطه‌ی $\vec{a}+\vec{b}=\vec{o}$ صدق می‌کنند، حاصل $||\vec{a}|\vec{b}-\vec{b}|\vec{a}||$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}|\vec{a}|^2$ ۲) $2|\vec{b}|^2$ ۳) $-2|\vec{b}|^2$ ۴) $\vec{o}$

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار باشند، جمع و تفاضل آن‌ها، به صورت $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ نشان داده می‌شود. برای محاسبه‌ی هر کدام از آن‌ها، به ترتیب مؤلفه‌های $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را نظیربه‌نظیر با هم جمع و یا از هم کم کنید! این‌جوری:

$$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)\quad,\quad \vec{b}=(b_1,b_2,b_3)\ \Rightarrow\ \begin{cases}\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)\\ \vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)\end{cases}$$

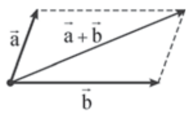
۲۹- هرگاه $\vec{a}=(2,1,2)$ و $\vec{b}=(-1,1,m)$ و همچنین $|\vec{a}+\vec{b}|=3\sqrt{14}$ باشند، اندازه‌ی $|\vec{b}|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{71}$ ۲) $5\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{83}$ ۴) $\sqrt{85}$

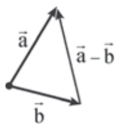
اگر تست از شما اندازه‌ی برداری رو خواست که مجموع یا تفاضل چند بردار بود، باید اول حتماً بردار داخل اندازه رو حساب کنی، بعد طول اون بردار رو! حواست باشه $\vec{a}+\vec{b}$ بردار جدیدی است که طولش لزوماً مساوی مجموع طول‌های $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نیست!

۳۰- اگر $\vec{V}_1=(2,3,1)$ و $\vec{V}_2=(1,-1,1)$ باشد، حاصل $\frac{|\vec{V}_1-2\vec{V}_2|}{|\vec{V}_1+2\vec{V}_2|}$ کدام است؟

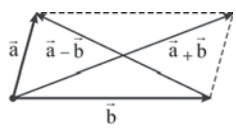
۱) ۱ ۲) $\sqrt{6}$ ۳) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$



اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار، با مبدأهای مشترک، باشند؛ بردار $\vec{a}+\vec{b}$ قطر متوازی‌الاضلاعی است که $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو ضلع مجاور آن هستند. البته قطری که با $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هم‌مبدأ است! $\vec{a}+\vec{b}$ را برایند $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هم می‌گویند. (روش متوازی‌الاضلاع!)



برای بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$، بردار $\vec{a}-\vec{b}$ ضلع سوم مثلثی است که $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو ضلع آن هستند. و این هم یعنی انتهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به هم وصل کن، می‌شه $\vec{a}-\vec{b}$. فقط جهتِ $\vec{a}-\vec{b}$ همیشه به سمت بردار اول است؛ یعنی در $\vec{a}-\vec{b}$ به طرف $\vec{a}$!



راستی $\vec{a}-\vec{b}$ در اون متوازی‌الاضلاعی که $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو ضلع مجاورش هستند، اون‌یکی قطره!
یعنی در یک متوازی‌الاضلاع با اضلاع $\vec{a}$ و $\vec{b}$، قطرها می‌شن $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$!

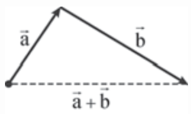
۳۱- محیط مثلثی که دو ضلع آن $\vec{a}=(۰,۱,۱)$ و $\vec{b}=(۱,۱,۰)$ باشند، کدام است؟

۱) ۳ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۲}+۲$

۳۲- اگر $\vec{u}=(-۱,۲,۳)$ و $\vec{v}=(۳,۰,۳)$ دو قطر متوازی‌الاضلاع بناشده روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشند، طول $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۴}$ و $\sqrt{۱۸}$ ۲) $\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۱۱}$ ۳) $\sqrt{۱۴}$ و $\sqrt{۱۱}$ ۴) $\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۱۸}$

● اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار دنبال همدیگر(!) باشند، یعنی انتهای $\vec{a}$، شروع بردار $\vec{b}$ باشه، اون‌وقت از اول بردار اول به انتهای بردار دوم وصل کن، این می‌شه جمع دو بردار. اینم جمع به روش مثلثه!



نتیجه‌ی این جمله اینه که: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$!

۳۳- اگر M، N، P و K چهار نقطه‌ی دلخواه در فضا باشند، حاصل کدام گزینه با بقیه، متفاوت است؟

۱) $\overrightarrow{KN}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PK}$ ۲) $\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PM}$ ۳) $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{MK}$ ۴) $\overrightarrow{NK}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{KM}$

اگر $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ بشه، $\vec{a}\perp\vec{b}$ می‌شود و برعکس. آخه اون متوازی‌الاضلاعی که با $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می‌ساختی، مستطیل می‌شه! در حالت کلی‌تر هم داریم: $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow |m\vec{a}+n\vec{b}|=|m\vec{a}-n\vec{b}|$

۳۴- هرگاه $\vec{a}$ و $۲\vec{b}$ بر هم عمود باشند و همچنین $\vec{a}+\vec{b}=(m+۱,-۲,۱)$ و $\vec{a}-\vec{b}=(-۱,۲m+۴,m+۵)$ باشند، مقدار m در کدام گزینه داده شده است؟

۱) -۶ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) -۳

اگر $\vec{a}+\vec{b}$ بر $\vec{a}-\vec{b}$ عمود باشد، اون‌وقت اندازه‌ی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مساوی خواهد بود و برعکس! $|\vec{a}|=|\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a}+\vec{b}\perp\vec{a}-\vec{b}$

این‌دفعه متوازی‌الاضلاع ساخته‌شده با $\vec{a}$ و $\vec{b}$ لوزی می‌شه. تازه قطرها در این حالت، نیمساز زوایای چهارضلعی هم هستند!

۳۵- اگر $\vec{a}=(m,۲,-۱)$ و $|\vec{b}|=\sqrt{۴۱}$ بوده و $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ بر هم عمود باشند، مقدار مثبت m کدام است؟ *(سراسری ۸۵)*

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

اگر $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ دو بردار موازی باشند، از نظر تحلیلی داریم: $\vec{a}\parallel\vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_۱}{b_۱}=\frac{a_۲}{b_۲}=\frac{a_۳}{b_۳}$

البته به شرطی که هیچ‌کدام از مؤلفه‌ها صفر نباشند!

۳۶- اگر بردارهای $\vec{a}=(m-n,۲m+۴n,۸)$ و $\vec{b}=(۱,۳,-۴)$ هم‌راستا باشند، حاصل $۲m-۸n$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

چنان‌چه هر کدام از مؤلفه‌های دو بردار موازی صفر باشد، باید مؤلفه‌ی نظیرش در بردار دیگر هم صفر باشد و برای مؤلفه‌های غیرصفر، شرط توازی را به صورت بالا (یعنی هم‌نسبت‌بودن مؤلفه‌های نظیر) بنویسید.

۳۷- بردارهای $\vec{a}=(۳m-۱,۳n-۶,۲m)$ و $\vec{b}=(۱۵m+۳,۰,۳۶)$ موازی‌اند. مقدار $\frac{m}{n}$ چه‌قدر است؟

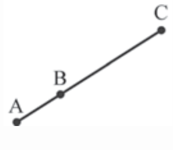
۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۵

● از نظر برداری، وقتی $\vec{a}\parallel\vec{b}$ باشد، ۱ زاویه‌ی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ صفر یا ۱۸۰° است؛ صفر وقتی هم‌جهت‌اند و ۱۸۰° وقتی غیرهم‌جهت‌اند. ۲ $\vec{a}=m\vec{b}$ است، به طوری که $m\in\mathbb{R}$ و $m\neq۰$.

۳۸- بردار $\vec{b}$ موازی با $\vec{a}=(۲,-۱,۱)$ بوده و طولش ۶ است. مجموع مؤلفه‌های $\vec{b}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) $۲\sqrt{۶}$ ۳) $۳\sqrt{۶}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

● اگر سه نقطه‌ی A، B و C روی یک خط راست واقع باشند، در این صورت $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{AC}$ و برعکس.



۳۹- اگر سه نقطه‌ی $A=(۱,۲,۳)$ ، $B=(m,n,۱)$ و $C=(-۱,۱,۲)$ بر روی یک خط راست واقع باشند، آن‌گاه $m+n$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۵ ۴) ۲

● برداری که اندازه‌ی آن برابر «یک» باشد، را بردار یکه می‌نامیم.

۴۰- اگر $\vec{a}=(k,\frac{۱}{۳},\sqrt{۷}k)$ برداری یکه باشد، آن‌گاه طول بردار $\vec{b}=(-k,۲k,-۲k)$ کدام است؟

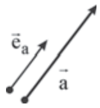
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۳

اگر $\vec{a}$ برداری دلخواه باشد، $\vec{e}_a$ بردار یکه‌ی هم‌جهت با $\vec{a}$ که بردار جهت $\vec{a}$ نیز نامیده می‌شود، به صورت $\vec{e}_a=\frac{۱}{|\vec{a}|}\vec{a}$ محاسبه می‌شود.

۴۱- اگر $\vec{a}=(۱,۱,-۱)$ و $\vec{b}=(۱,۲,۲)$ باشد، در این صورت بردار جهت $۲\vec{a}+\vec{b}$ کدام است؟

۱) $(-\frac{۳}{۵},-\frac{۴}{۵},۰)$ ۲) $(۳,۴,۰)$ ۳) $(-۳,-۴,۰)$ ۴) $(\frac{۳}{۵},\frac{۴}{۵},۰)$

● اگر $\vec{a}$ برداری دلخواه و $\vec{e}_a$ بردار جهت آن باشد، در این صورت ۱ $\vec{a}\parallel\vec{e}_a$ ۲ $\vec{e}_a$ همواره هم‌جهت است با $\vec{a}$ ۳ $|\vec{e}_a|=۱$.



۴۲- اگر $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ باشد، در این صورت زاویه‌ی بین $\vec{e}_a$ و $\vec{e}_{a+b}$ کدام است؟

۱) ۳۰° ۲) ۶۰° ۳) ۴۵° ۴) ۹۰°

تمام بردارهای موازی و هم‌جهت دارای یک بردار یکه‌ی یکسان هستند؛ حتی با اندازه‌های متفاوت!

به عبارت دیگر:
$$\begin{cases} m<۰ \Leftrightarrow \vec{e}_{ma}=\vec{e}_{-a}=-\vec{e}_a \\ m>۰ \Leftrightarrow \vec{e}_{ma}=\vec{e}_a \end{cases}$$

۴۳- اگر $\vec{a}=(-۱,۵,-۳)$ و $\vec{b}=(۲,-۳,۵)$ باشد، بردار جهت $(\vec{a}+\vec{b})|۲\vec{a}+۳\vec{b}|$ کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳})$ ۲) $(\frac{۱}{۳},-\frac{۲}{۳},-\frac{۲}{۳})$ ۳) $(-\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳})$ ۴) $(\frac{۲}{۳},\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})$

● از بین تمامی بردارهای یکه، سه بردار یکه اهمیت بیشتری دارند، بردارهای جهت محورهای مختصات:

$\vec{i}=(۱,۰,۰)$ یکه‌ی محور x ها $\vec{j}=(۰,۱,۰)$ یکه‌ی محور y ها $\vec{k}=(۰,۰,۱)$ یکه‌ی محور z ها

اهمیت این سه بردار در این است که تمام بردارها، با این سه بردار ساخته می‌شوند، این‌جوری: $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳) \Leftrightarrow \vec{a}=a_۱\vec{i}+a_۲\vec{j}+a_۳\vec{k}$

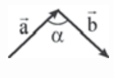
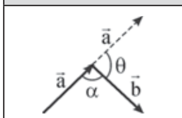
حالا از این به بعد می‌توانی بردار رو به جای نشان‌دادن با یه سه‌تایی مرتب، با جمع سه مولفه‌اش با ضرایب $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ نشون بدی ...

۴۴- محیط مثلثی که با دو بردار $\vec{i}+\vec{j}$ و $\vec{j}-\vec{k}$ ساخته می‌شود، کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

● اگر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هم‌مبدأ باشند، زاویه‌ی بین آن‌ها را «زاویه‌ی بین دو بردار» می‌نامیم. این زاویه، حداقل صفر و حداکثر ۱۸۰° است.

● اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هم‌مبدأ نبودند، با انتقال آن‌ها (بردار هم‌ارز)، زاویه را بیابید، این‌جوری:

وضعیت ۲ بردار	شکل	زاویه‌ی بین دو بردار	دلیل
بردارها دنبال هم هستند		$\theta=۱۸۰^\circ-\alpha$	
بردارها انتهای یکسان دارند		$\theta=\alpha$	

زاویه‌ی دو بردار، در هندسه، هیچ‌گاه منفی و یا بیشتر از ۱۸۰° نمی‌شود. هم‌چنین موقع محاسبه‌ی زاویه‌ی بین دو بردار به ابتدای بردارها توجه کنید...!

۴۵- اگر $|2\vec{a}|=|3\vec{b}|=|3\vec{b}-2\vec{a}|$ باشد و زاویه‌ی بین $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{a}$، زاویه‌ی بین $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{b}$ و زاویه‌ی بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به ترتیب α، β و γ بنامیم، کدام گزینه درست است؟

۱) $\alpha=\beta=\gamma$ ۲) $\alpha=\frac{\beta}{2}=\gamma$ ۳) $\beta=\frac{\alpha}{2}=\gamma$ ۴) $\alpha=\beta=\frac{\gamma}{2}$

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار دلخواه باشند، راستای نیمساز زاویه‌ی بین آن‌ها می‌شود $|\vec{a}|\vec{b}+|\vec{b}|\vec{a}$.

۴۶- کدام بردار در راستای نیمساز زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}=-\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ و $\vec{b}=3\vec{i}-4\vec{j}$ قرار دارد؟

۱) $4\vec{i}-11\vec{j}+10\vec{k}$ ۲) $2\vec{i}+11\vec{j}+5\vec{k}$ ۳) $2\vec{i}-11\vec{j}+5\vec{k}$ ۴) $4\vec{i}-22\vec{j}-10\vec{k}$

برای بردارهای دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$، بردار $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ که همان $\vec{e}_a+\vec{e}_b$ باشد، نیز در راستای نیمساز زاویه‌ی بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ قرار دارد.

۴۷- زاویه‌ی بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $(3\alpha+5)^\circ$ و زاویه‌ی بین $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ با $\vec{b}$ نیز $(\alpha+10)^\circ$ است. α کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲۵ ۳) ۱۵ ۴) ۱۰

اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار دلخواه در فضا باشند، در این صورت حاصل‌ضرب داخلی (یا اسکالر) بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با نماد $\vec{a}\cdot\vec{b}$، یک عدد حقیقی می‌شود و به صورت $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ محاسبه می‌گردد.

۴۸- سه نقطه‌ی $A=(1,0,2)$، $B=(2,-1,1)$ و $C=(0,1,3)$ مفروض‌اند. حاصل $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) -1 ۴) صفر

۴۹- اگر $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{k}$، $\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{c}=3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ باشند، حاصل عبارت $(3\vec{a})\cdot(2\vec{b}+\vec{c})$ چه‌قدر است؟

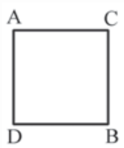
۱) ۱۵ ۲) ۹ ۳) ۲۷ ۴) ۲۱

از نظر هندسی داریم $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$. ($\theta$ زاویه‌ی بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است.)

این فرمول را زمانی که مؤلفه‌های بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را نداشتیم و خواستیم $\vec{a}\cdot\vec{b}$ را باز کنیم، استفاده می‌کنیم!

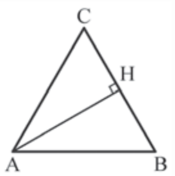
همیشه: $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ است. آخه زاویه‌ی $\vec{a}$ با خودش صفره!

۵۰- در مربع شکل مقابل به قطر ۲، حاصل $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ برابر است با:



۱) ۸ ۲) ۶ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $8\sqrt{2}$

۵۱- در مثلث متساوی‌الاضلاع شکل مقابل به ضلع ۲، حاصل $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}$ کدام است؟



۱) ۹ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{9}{2}$ ۴) ۱۲

از آن‌جا که اندازه‌ی بردار غیرصفر همیشه مثبت است (!) پس علامت $\vec{a}\cdot\vec{b}$ بستگی به علامت $\cos$ دارد. در حالت کلی داریم:

θ حاده $\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}>0 \Leftrightarrow |\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}-\vec{b}|$

θ منفرجه $\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}<0 \Leftrightarrow |\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$

۵۲- به ازای چه مقادیری از x، زاویه‌ی میان بردارهای $\vec{a}=x\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=(2x,x,-1)$ حاده و زاویه‌ی میان بردار $\vec{b}$ و محور Oy منفرجه است؟

۱) $x<0$ ۲) $\frac{1}{2}<x<1$ ۳) $x>1$ ۴) $x<1$

اگر $\vec{a}\cdot\vec{b}=۰$ شود، حداقل یکی از دو بردار صفر بوده است و چنان‌چه هر دو غیرصفر باشند، این دو بردار بر هم عمودند: $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=۰$

۵۳- هرگاه $A=(m,۱,۰)$ ، $B=(m,m,۱)$ و $C=(۲m,۱,۲)$ بوده و $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$ باشد، مقدار m برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۲-

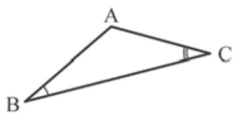
اگر θ زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، برای محاسبه‌ی θ از رابطه‌ی $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ استفاده کنید.

۵۴- اگر $\vec{a}=۲\vec{i}+۳\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ باشند، آن‌گاه کسینوس زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{b}$ کدام است؟ *(سراسری ۸۱)*

۱) $-\sqrt{\dfrac{۳}{۱۷}}$ ۲) $-\sqrt{\dfrac{۵}{۱۷}}$ ۳) $\sqrt{\dfrac{۳}{۱۷}}$ ۴) $\sqrt{\dfrac{۵}{۱۷}}$

۵۵- اگر اندازه‌ی دو بردار $\vec{V}_۱=۲\vec{i}+(a+۱)\vec{j}+۴\vec{k}$ و $\vec{V}_۲=a\vec{i}+۴\vec{j}+۳\vec{k}$ با هم برابر باشند، در این صورت کسینوس زاویه‌ی بین دو بردار کدام است؟

۱) $\dfrac{۱۶}{۲۹}$ ۲) $\dfrac{۲۴}{۲۹}$ ۳) $\dfrac{۴}{\sqrt{۲۹}}$ ۴) $\dfrac{۲۸}{۲۹}$



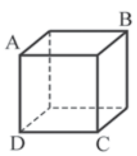
اگر تست، مختصات سه رأس مثلثی را داد و زاویه‌ی رأس‌ها را خواست، کافی است دو بردار هم‌مبدأ به رأسی که زاویه‌اش خواسته شده بسازید. مثلاً زاویه‌ی B در مثلث ABC ، زاویه‌ی بین بردارهای $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BA}$ است.

۵۶- در مثلث ABC که مختصات رئوس آن عبارت‌اند از $A=(-۱,-۲,۳)$ ، $B=(-۳,-۱,۰)$ و $C=(-۲,۲,-۲)$؛ اندازه‌ی زاویه‌ی C برابر است با:

۱) ۳۰° ۲) ۶۰° ۳) ۴۵° ۴) ۹۰°

از آن‌جا که حاصل‌ضرب اسکالر دو بردار، عدد می‌شود بنابراین جواب ضرب داخلی به موقعیت قرارگرفتن آن‌ها در فضا بستگی ندارد و بردارها با هر انتقالی که پیدا کنند، جواب ضربشان فرق نمی‌کند. پس دستگاه مختصات دکارتی رو هر جا می‌خوای، در نظر بگیر. این یه راه خوب برای نوشتن مؤلفه‌های برداره! به عبارت دیگه، وقتی مؤلفه‌ها داده نشده‌اند، تو دستگاه مختصات رو هر جا خواستی بذار ...

۵۷- در مکعب شکل مقابل به طول یال ۳، حاصل‌ضرب داخلی $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ چه‌قدر است؟

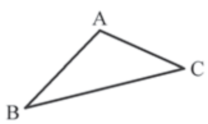


۱) ۹ ۲) ۱۸

۳) صفر ۴) ۲۷

در هر مثلث دلخواه ABC ، قضیه‌ی کسینوس‌ها به صورت زیر برقرار است:

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲-۲AB\times AC\times\cos\hat{A}$$



کاربرد قضیه‌ی کسینوس‌ها وقتی است که در مثلث، دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها را داشته باشیم و بخواهیم ضلع سوم را حساب کنیم.

ضرب داخلی دو بردار، ویژگی‌هایی دارد که به ترتیب عبارت‌اند از:

۱ خاصیت جابه‌جایی: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$!

۲ خاصیت توزیع‌پذیری روی جمع و منها: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$؛ همون خاصیت پخشی خودمون!

راستی این قانون، اجازه‌ی فاکتورگیری رو هم به ما میده!

۵۸- در کدام حالت، حاصل‌ضرب عددی بردار غیرصفر $\vec{a}$ در مجموع دو بردار غیرصفر $\vec{X}$ و $\vec{Y}$ صفر <u>نیست</u>؟ *(سراسری ۸۶)*

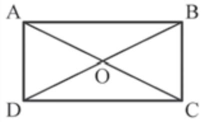
۱) بردار $\vec{X}$ قرینه‌ی بردار $\vec{Y}$ باشد.

۲) بردار $\vec{a}$ فقط بر یکی از دو بردار $\vec{X}$ یا $\vec{Y}$ عمود باشد.

۳) سه بردار، دوبه‌دو بر هم عمود باشند.

۴) بردار $\vec{a}$ بر صفحه‌ی دو بردار $\vec{X}$ و $\vec{Y}$ عمود باشد.

۵۹- در مستطیل ABCD به اضلاع $AB=۱۲$ و $BC=۵$، نقطه‌ی O محل تلاقی اقطار است؛ حاصل‌ضرب داخلی $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱۶۹}{۲}$

۲) ۹۷

۳) ۶۱

۴) $\frac{۹۷}{۲}$

۳ اینم پخشی چندتایی؛ که مثل توزیع‌پذیری معمولی عددها انجام می‌شه: $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}$

۶۰- هرگاه $|\vec{a}|=۲$، $|\vec{b}|=۳$ و $\vec{a}\cdot\vec{b}=m$ بوده و همچنین حاصل $(۳\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+۲\vec{b})$ نیز برابر $۱۴m+۲$ باشد، مقدار m چه‌قدر است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) −۳ ۴) −۴

۴ شرکت‌پذیری ضرب داخلی بی‌معنی است! $\underbrace{(\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{\text{عدد}})\cdot\vec{c}}_{\text{بی‌معنی}} \neq \underbrace{\vec{a}\cdot(\underbrace{\vec{b}\cdot\vec{c}}_{\text{عدد}})}_{\text{بی‌معنی}}$. اما ضرب داخلی می‌تواند در یک بردار، ضرب شود؛ آخه ضرب عدد در بردار است!

۶۱- $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم زاویه‌ی ۱۳۵° می‌سازند. زاویه‌ی بین بردارهای $(\vec{b}\cdot\vec{b})\vec{b}$ و $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}$ کدام است؟

۱) ۱۴۵° ۲) ۳۵° ۳) ۵۵° ۴) ۴۵°

۵ ضرب داخلی بردارهای یکه:

$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=۱$، چون طول بردارهای یکه، یک است!

$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=۰$، آخه دوبه‌دو بر هم عمودند ...!

۶۲- حاصل عبارت $۲\vec{i}\cdot(\vec{i}-۲\vec{j}+۳\vec{k})+\vec{j}\cdot(۲\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})+۳\vec{k}\cdot(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})$ برابر است با:

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) −۳ ۴) −۲

● اتحادهای بُرداری! ($\vec{c},\vec{b},\vec{a}$ بردارهای دلخواه‌اند ...)

	رابطه‌ی برداری	کاربرد
۱	$\lvert\vec{a}+\vec{b}\rvert^۲=\lvert\vec{a}\rvert^۲+\lvert\vec{b}\rvert^۲+۲\vec{a}\cdot\vec{b}$ $\lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert^۲=\lvert\vec{a}\rvert^۲+\lvert\vec{b}\rvert^۲-۲\vec{a}\cdot\vec{b}$	با داشتنِ اندازه‌ی جمع (یا تفاضل) دو بردار می‌تونی، ضرب داخلیِ اونا رو حساب کنی، یا برعکس ...
۲	$\lvert\vec{a}+\vec{b}\rvert^۲+\lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert^۲=۲(\lvert\vec{a}\rvert^۲+\lvert\vec{b}\rvert^۲)$	با داشتن اندازه‌ی جمع دو بردار، اندازه‌ی تفاضلِ اونا را حساب کنی، یا برعکس ...
۳	$\lvert\vec{a}+\vec{b}\rvert^۲-\lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert^۲=۴\vec{a}\cdot\vec{b}$	اندازه‌ی جمع و منهایِ دو بردار رو داری، ضرب داخلی رو حساب کن ...
۴	$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\lvert\vec{a}\rvert^۲-\lvert\vec{b}\rvert^۲$	اتحاد مزدوجه دیگه!
۵	$\lvert\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\rvert^۲=\lvert\vec{a}\rvert^۲+\lvert\vec{b}\rvert^۲+\lvert\vec{c}\rvert^۲+۲\vec{a}\cdot\vec{b}+۲\vec{a}\cdot\vec{c}+۲\vec{b}\cdot\vec{c}$	محاسبه‌ی اندازه‌ی جمعِ سه بردار یا ضرب داخلیِ دوبه‌دوی آن‌ها

۶۳- اگر $|\vec{a}|=۲\sqrt{۶}$، $|\vec{b}|=۵$ و $\vec{a}\cdot\vec{b}=۰$ باشد، اندازه‌ی بردار $\vec{a}-\vec{b}$ کدام است؟ *(سراسری ۸۳)*

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

۶۴- اگر $|\vec{a}|=۴$، $|\vec{b}|=۳$ و $|\vec{a}-\vec{b}|=۵$ باشد، آن‌گاه $|\vec{a}+\vec{b}|$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $\frac{۱۱}{۲}$

پاسخ نامه‌ی فصل ۱ بردارها

۱- گزینه‌ی «۱»

کلید حل تست، یافتن جای نقطه‌ی B است: $B=(-۱,-۲,۲)$؛ آدرس B می‌گه: از مبدأ مختصات شروع کن، یکی به عقب، دو واحد به چپ و ۲ واحد به بالا!

۲- گزینه‌ی «۴»

$A=(n^۳-n,۱,۲n-۱) \xrightarrow[x=۰]{\text{روی } yOz} n^۳-n=۰$

$\Rightarrow n(n^۲-۱)=۰ \Rightarrow n=۰$ یا $n=\pm۱$ ①

$B=(m-۳,۲m,n^۲+۳n+۲)$

$\xrightarrow[x=۰,\ z=۰]{\text{روی محور } Oy} m-۳=۰,\ n^۲+۳n+۲=۰$

$\Rightarrow m=۳,\ n=-۱,-۲$ ②

① $\cap$ ② $\Rightarrow m=۳,\ n=-۱ \xrightarrow{+} ۲$

۳- گزینه‌ی «۳»

نقطه‌ی روی محور zها را $B=(۰,۰,k)$ می‌گیریم: $|AB|=۶$

$\Rightarrow \sqrt{۲۰+(k+۱)^۲}=۶ \xrightarrow{\text{توان ۲}} (k+۱)^۲=۱۶$

$\Rightarrow k+۱=\pm۴ \Rightarrow k=۳$ یا -۵

۴- گزینه‌ی «۲»

$|OA|=۹ \xrightarrow{A=(m,-۲m,۲m)} \sqrt{m^۲+(-۲m)^۲+(۲m)^۲}=۹$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} m^۲+۴m^۲+۴m^۲=۸۱ \Rightarrow ۹m^۲=۸۱$

$\Rightarrow m^۲=۹ \Rightarrow m=\pm۳$

و چون $B=(m-۲,m+۱,۳m)$ است؛ با فرض $m=۳$، داریم $B=(۱,۴,۹)$ و با فرض $m=-۳$ هم $B=(-۵,-۲,-۹)$ جمع مؤلفه‌های B، به ترتیب ۱۴ و ۱۶- است.

۵- گزینه‌ی «۴»

$A=(۳,۵,۱) \xrightarrow[x=۰\ ,\ z=۰]{\text{تصویر روی } Oy} B=(۰,۵,۰)$

$A=(۳,۵,۱) \xrightarrow[y=۰]{\text{تصویر روی } xOz} C=(۳,۰,۱)$

$\Rightarrow BC=\sqrt{۳^۲+۵^۲+۱^۲}=\sqrt{۳۵}$

۶- گزینه‌ی «۴»

$A=(۱,۲,-۳) \xrightarrow[y\to-y,\ z\to-z]{\text{قرینه نسبت به محور x ها}} A_۱=(۱,-۲,۳)$

$B=(-۱,۲,۴) \xrightarrow[z=۰]{\text{تصویر روی } xOy} B_۱=(-۱,۲,۰)$

$\Rightarrow A_۱B_۱=\sqrt{۲^۲+۴^۲+۳^۲}=\sqrt{۲۹}$

۷- گزینه‌ی «۴»

$A=(a,۲,۱-a) \xrightarrow[y\to-y\ ,\ z\to-z]{\text{قرینه نسبت به محور x ها}} A'=(a,-۲,a-۱)$

$\xrightarrow{B=(-۲,-۱,a+۱)} A'B=\sqrt{(a+۲)^۲+۱+۴}=\sqrt{۵}$

پس $(a+۲)^۲=۰$ و در نتیجه $a=-۲$.

$C=(-a,\frac{a}{۲},۱) \xrightarrow{a=-۲} C=(۲,-۱,۱)$

$\xrightarrow[y\to-y]{\text{قرینه نسبت به } xz} C'=(۲,۱,۱) \Rightarrow$ جمع مؤلفه‌ها $=۴$

۸- گزینه‌ی «۳»

اگر $M=(x,y,z)$ فرض شود، تست از ما خواسته که $MP=\sqrt{۵}$ گردد!

$MP=\sqrt{(x+۱)^۲+(y+۲)^۲+(z-۱)^۲}=\sqrt{۵}$

$\xrightarrow[\text{اتحاد}]{\text{توان ۲}} x^۲+y^۲+z^۲+۲x+۴y-۲z+۱=۰$

۹- گزینه‌ی «۲»

$A=(\alpha,\beta,۳\alpha)$

$\xrightarrow{\text{فاصله تا محور } Ox} \sqrt{\beta^۲+۹\alpha^۲}$

$\xrightarrow{\text{فاصله تا محور } Oz} \sqrt{\alpha^۲+\beta^۲}$

$\xrightarrow{\text{فاصله از x ها، ۲ برابر}} \sqrt{\beta^۲+۹\alpha^۲}=۲\sqrt{\alpha^۲+\beta^۲}$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \beta^۲+۹\alpha^۲=۴\alpha^۲+۴\beta^۲ \Rightarrow ۵\alpha^۲=۳\beta^۲$

۱۰- گزینه‌ی «۲»

$A=(-۲,۴,m-۱) \xrightarrow{\text{فاصله تا } xy} |m-۱|=۳$

$\Rightarrow m-۱=\pm۳ \Rightarrow m=۴,-۲ \xrightarrow{m<۰} m=-۲$

$m=-۲ \Rightarrow B=(-۵,۲,۳) \xrightarrow{\text{فاصله تا } yz} |-۵|=۵$

۱۱- گزینه‌ی «۳»

$AB=\sqrt{۱+۴+۹}=\sqrt{۱۴}$

$AC=\sqrt{۶۴+۹+۱۶}=\sqrt{۸۹}$

$BC=\sqrt{۴۹+۲۵+۱}=\sqrt{۷۵}$

خب متساوی‌الساقین و متساوی‌الاضلاع که نیست! حالا قائم‌الزاویه:

$(\sqrt{۸۹})^۲\overset{?}{=}(\sqrt{۷۵})^۲+(\sqrt{۱۴})^۲ \Rightarrow ۸۹\overset{?}{=}۷۵+۱۴ \Rightarrow ۸۹=۸۹$ ✓

۱۲- گزینه‌ی «۳»

می‌دانی که: $|AB|\le|AC|+|BC|$! این جمله، یعنی مینیمم $|AC|+|BC|$، می‌شود $|AB|$؛ پس: $|AB|=\sqrt{۴+۴+۱}=۳$

۱۳- گزینه‌ی «۴»

میانه‌ی CM از C به وسط AB وارد می‌شه:

وسط AB $M=\frac{A+B}{۲}=\frac{(۱,-۲,-۱)+(۱,۲,m)}{۲}=(۱,۰,\frac{m-۱}{۲})$

$\xrightarrow{C=(۳,۲,۲)} |CM|=\sqrt{۴+۴+(\frac{m-۵}{۲})^۲}=۳$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{(m-۵)^۲}{۴}=۱ \Rightarrow m-۵=\pm۲$

$\Rightarrow m=۷$ یا ۳

$\xrightarrow{m=۷} B=(۱,۲,۷) \xrightarrow{\text{فاصله تا مبدأ}} \sqrt{۵۴}=۳\sqrt{۶}$

$\xrightarrow{m=۳} B=(۱,۲,۳) \xrightarrow{\text{فاصله تا مبدأ}} \sqrt{۱۴}$

۱۴- گزینه‌ی «۲»

$$۳\overrightarrow{MA}=۲\overrightarrow{BM} \Rightarrow -۳\overrightarrow{AM}=۲\overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{AM}=-\frac{۲}{۳}\overrightarrow{BM}$$

$$\xrightarrow{m=-۲\ ,\ n=۳} M=\frac{۳A+۲B}{۵}=\frac{(-۳,-۳,۶)+(-۲,-۱۲,۴)}{۵}$$

$$=(-۱,-۳,۲)$$

۱۵- گزینه‌ی «۱»

$$A'=(-۲,-۱,۱)$$

$$\xrightarrow{A=(-۱,۲,۳)} A''=۲A'-A=۲(-۲,-۱,۱)-(-۱,۲,۳)$$

$=(-۳,-۴,-۱) \Rightarrow$ جمع مؤلفه‌ها $=-۸$

۱۶- گزینه‌ی «۳»

$$G=\frac{A+B+C}{۳} \xrightarrow{\times ۳} A+B+C=۳G$$

$$\Rightarrow (۳,-۱,۴)+(۱,m,۶)+(۲,۳,n)=\underbrace{(۶,۳,۲۱)}_{۳G}$$

$$\Rightarrow (۶,۲+m,۱۰+n)=(۶,۳,۲۱) \Rightarrow \begin{cases} ۲+m=۳ \Rightarrow m=۱ \\ ۱۰+n=۲۱ \Rightarrow n=۱۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۴m-n=۴-۱۱=-۷$$

۱۷- گزینه‌ی «۳»

$ABCD$ متوازی‌الاضلاع $\Rightarrow A+C=B+D$

$$\Rightarrow (۵,-۱,۰)+(a+b,-۳a-۶b,۵)=(۴,۶,۳)+(۳,-۴,۲)$$

$$\Rightarrow (a+b+۵,-۳a-۶b-۱,۵)=(۷,۲,۵) \Rightarrow \begin{cases} a+b+۵=۷ \\ -۳a-۶b-۱=۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=۲ \\ -۳a-۶b=۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a=۵\ ,b=-۳ \Rightarrow ab=-۱۵$$

۱۸- گزینه‌ی «۳»

$MNPQ$ متوازی‌الاضلاع $\Rightarrow M+P=N+Q$

$$\Rightarrow \underbrace{(-۲,۳,۱)+(۰,-۱,۲)}_{(-۲,۲,۳)}=(۲,-۲,۶)+Q$$

$$\Rightarrow Q=(-۲,۲,۳)-(۲,-۲,۶) \Rightarrow Q=(-۴,۴,-۳)$$

فاصله‌ی Q تا محور xها، $\sqrt{۲۵}$، تا محور yها، $\sqrt{۲۵}$ و تا محور zها، $\sqrt{۳۲}$ است که مجموع آن‌ها می‌شود: $۱۰+۴\sqrt{۲}$

۱۹- گزینه‌ی «۲»

$$\overrightarrow{AB}=\vec{a} \Rightarrow B-A=\vec{a} \Rightarrow B-(۲,۱,-۵)=(۱,-۱,۳)$$

$$\Rightarrow B=(۱,-۱,۳)+(۲,۱,-۵) \Rightarrow B=(۳,۰,-۲)$$

۲۰- گزینه‌ی «۴»

$$۲\overrightarrow{AM}+۳\overrightarrow{BM}=۳\overrightarrow{AB} \Rightarrow ۲(M-A)+۳(M-B)=۳(B-A)$$

$$\Rightarrow ۲M-۲A+۳M-۳B=۳B-۳A \Rightarrow ۵M=۶B-A$$

$$\Rightarrow M=\frac{۱}{۵}(۶B-A)=\frac{۱}{۵}[(۱۲,-۳۰,۲۴)-(۲,۰,-۱)]$$

$$=\frac{۱}{۵}(۱۰,-۳۰,۲۵)=(۲,-۶,۵)$$

۲۱- گزینه‌ی «۱»

$$\sqrt{۲^۲+(m-۱)^۲+(-m)^۲}=۳ \Rightarrow \sqrt{۴+(m-۱)^۲+m^۲}=۳$$

$$\xrightarrow[\text{اتحاد}]{\text{توان ۲}} ۲m^۲-۲m-۴=۰ \xrightarrow{\div ۲} m^۲-m-۲=۰$$

$\Rightarrow m=-۱$ یا $m=۲$

۲۲- گزینه‌ی «۳»

$$\vec{a}=(۲m-۴,۲m,۳) \xrightarrow[x=۰]{\text{عمود بر محور x ها}} ۲m-۴=۰ \Rightarrow m=۲$$

$$\Rightarrow \vec{a}=(۰,۴,۳) \Rightarrow |\vec{a}|=\sqrt{۰+۱۶+۹}=۵$$

۲۳- گزینه‌ی «۴»

$$\vec{a}=(m-۲,m+n,۱-m)$$

$$\xrightarrow[\text{عمود بر yOz}]{\text{موازی محور Ox}} \begin{cases} m+n=۰ \\ ۱-m=۰ \end{cases} \Rightarrow m=۱\ ,\ n=-۱$$

$$\Rightarrow ۲m-n=۳$$

۲۴- گزینه‌ی «۲»

$$\overrightarrow{BA}=A-B=(۲,۰,-m)-(-۲m,n-۲,-۱)$$

$$=(۲+۲m,-n+۲,-m+۱)$$

$$\xrightarrow{\overrightarrow{BA}=\vec{u}} (۲+۲m,-n+۲,-m+۱)=(n-۱,-۲m-۱,n-۵)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲+۲m=n-۱ \\ -n+۲=-۲m-۱ \\ -m+۱=n-۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲m-n=-۳ \\ -m-n=-۶ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} m=۱,n=۵ \Rightarrow mn=۵$$

۲۵- گزینه‌ی «۲»

$$۳\vec{a}=۳(m+۱,n,p-۱)=(۳m+۳,۳n,۳p-۳)$$

$$\xrightarrow{\vec{b}=۳\vec{a}} (۳m+۳,۳n,۳p-۳)=(۶n,۲m+n,۱-n)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳m+۳=۶n \\ ۳n=۲m+n \\ ۳p-۳=۱-n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳m-۶n=-۳ \\ m=n \\ ۳p+n=۴ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} m=۱\ ,\ n=۱\ ,\ p=۱ \Rightarrow m+n+p=۳$$

۲۶- گزینه‌ی «۱»

$$\begin{cases} \dfrac{\vec{a}}{|\vec{b}|}=\overset{\text{عدد مثبت}}{\boxed{\dfrac{۱}{|\vec{b}|}}}\vec{a}=\vec{a}\ \text{برداری هم‌جهت با} \\ \vec{a}\,|\vec{a}|=\underset{\text{عدد مثبت}}{\boxed{|\vec{a}|}}\vec{a}=\vec{a}\ \text{برداری هم‌جهت با} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ زاویه‌ی دو بردار هم‌جهت با $\vec{a}$، صفر است

۲۷- گزینه‌ی «۱»

$$\Big|\overset{\text{عدد مثبت}}{\boxed{|\vec{a}|}}\vec{a}\Big|=۴$$

$$\xrightarrow{\text{خروج عدد!}} |\vec{a}|\,|\vec{a}|=۴ \Rightarrow |\vec{a}|^۲=۴ \Rightarrow |\vec{a}|=۲$$

حالا: $|-\frac{۱}{۲}\vec{a}|=\frac{۱}{۲}|\vec{a}| \xrightarrow{|\vec{a}|=۲} \frac{۱}{۲}\times ۲=۱$

۲۸- گزینه‌ی «۲»

$\vec a+\vec b=\vec o \Rightarrow \vec a=-\vec b$

$\Rightarrow ||\vec a|\vec b|-\vec b|\vec a||=|(-\vec b)|\vec b|-\vec b|-\vec b||=|-|\vec b|\vec b-\vec b|\vec b||$

$=|-۲\vec b|\vec b||=۲|\underbrace{\vec b|\vec b|}_{\text{خروج عدد}}|=۲|\vec b||\vec b|=۲|\vec b|^{۲}$

۲۹- گزینه‌ی «۳»

$\vec a=(۲,۱,۲) \Rightarrow \vec b=(-۱,۱,m) \Rightarrow \vec a+\vec b=(۱,۲,۲+m)$

$\Rightarrow |\vec a+\vec b|=\sqrt{۱+۴+(m+۲)^{۲}}=۳\sqrt{۱۴}$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} (m+۲)^{۲}=۱۲۱$

$\Rightarrow m+۲=\pm ۱۱ \Rightarrow m=۹$ یا -۱۳

با فرض $m=۹$، داریم: $\vec b=(-۱,۱,۹) \Rightarrow |\vec b|=\sqrt{۱+۱+۸۱}=\sqrt{۸۳}$

۳۰- گزینه‌ی «۱»

$$\frac{|\vec V_{۱}-۲\vec V_{۲}|}{|\vec V_{۱}+۲\vec V_{۲}|}=\frac{|(۲,۳,۱)-(۲,-۲,۲)|}{|(۲,۳,۱)+(۲,-۲,۲)|}=\frac{|(۰,۵,-۱)|}{|(۴,۱,۳)|}$$

$$=\frac{\sqrt{۲۵+۱}}{\sqrt{۱۶+۱+۹}}=\frac{\sqrt{۲۶}}{\sqrt{۲۶}}=۱$$

۳۱- گزینه‌ی «۲»

اندازه‌ی ضلع سوم مثلث می‌شه $|\vec a-\vec b|$، پس:

$|\vec a|=\sqrt{۰+۱+۱}=\sqrt{۲}$

$|\vec b|=\sqrt{۱+۱+۰}=\sqrt{۲}$

$\vec a-\vec b=(-۱,۰,۱) \xrightarrow{\text{اندازه}} |\vec a-\vec b|=\sqrt{۱+۰+۱}=\sqrt{۲}$

$\Rightarrow$ محیط = جمع سه ضلع $=۳\sqrt{۲}$

۳۲- گزینه‌ی «۲»

قطرهای متوازی‌الاضلاع، یعنی جمع و تفاضل دو بردار:

$$\left.\begin{matrix}\vec u=\vec a+\vec b=(-۱,۲,۳)\\ \vec v=\vec a-\vec b=(۳,۰,۳)\end{matrix}\right\} \xrightarrow{+} ۲\vec a=(۲,۲,۶)$$

$\xrightarrow{\div ۲} \vec a=(۱,۱,۳) \xrightarrow{\text{اندازه}} |\vec a|=\sqrt{۱+۱+۹}=\sqrt{۱۱}$

$\vec a=(۱,۱,۳) \xrightarrow{\vec a+\vec b=(-۱,۲,۳)} \vec b=(-۱,۲,۳)-(۱,۱,۳)=(-۲,۱,۰)$

$\xrightarrow{\text{اندازه}} |\vec b|=\sqrt{۴+۱+۰}=\sqrt{۵}$

۳۳- گزینه‌ی «۱»

بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌ی (۱): $\overrightarrow{KN}+\underbrace{\boxed{\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PK}}}_{\overrightarrow{MK}}=\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KN}=\overrightarrow{MN}$

گزینه‌ی (۲): $\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{NP}+\underbrace{\boxed{\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MN}}}_{\overrightarrow{PN}}$

$=\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{PP}=\vec o$

گزینه‌ی (۳): $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KP}=\overrightarrow{PP}=\vec o$

گزینه‌ی (۴): $\overrightarrow{NK}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{NK}+\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{NN}=\vec o$

۳۴- گزینه‌ی «۴»

چون $\vec a$ بر $۲\vec b$ عمود است، پس $\vec a\perp\vec b$ است و لذا $|\vec a+\vec b|=|\vec a-\vec b|$. پس:

$\sqrt{(m+۱)^{۲}+(-۲)^{۲}+(۱)^{۲}}=\sqrt{(-۱)^{۲}+(۲m+۴)^{۲}+(m+۵)^{۲}}$

$\xrightarrow[\text{اتحاد}]{\text{توان ۲}} m^{۲}+۲m+۶=۵m^{۲}+۲۶m+۴۲$

$\Rightarrow ۴m^{۲}+۲۴m+۳۶=۰ \xrightarrow{\div ۴} m^{۲}+۶m+۹=۰ \Rightarrow m=-۳$

۳۵- گزینه‌ی «۴»

$\vec a+\vec b\perp\vec a-\vec b \xrightarrow{\text{چهارضلعی لوزی}} |\vec a|=|\vec b|$

$\Rightarrow \sqrt{m^{۲}+(۲)^{۲}+(-۱)^{۲}}=\sqrt{۴۱} \xrightarrow{\text{توان ۲}} m^{۲}+۵=۴۱$

$\Rightarrow m^{۲}=۳۶ \Rightarrow m=\pm ۶ \xrightarrow{m>۰} m=۶$

۳۶- گزینه‌ی «۴»

$\vec a\parallel\vec b \Rightarrow \frac{m-n}{۱}=\frac{۲m+۴n}{۳}=\underbrace{\boxed{\frac{۸}{-۴}}}_{-۲}$

$\Rightarrow \begin{cases} m-n=-۲\\ ۲m+۴n=-۶\end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} m=-\frac{۷}{۳}\ ,\ n=-\frac{۱}{۳}$

$\Rightarrow ۲m-۸n=-۲$

۳۷- گزینه‌ی «۲»

$۳n-۶=۰ \Rightarrow n=۲$

از طرفی: $\frac{۱۵m+۳}{۳m-۱}=\underbrace{\boxed{\frac{۳۶}{۲m}}}_{\frac{۱۸}{m}} \xrightarrow{\times\frac{۱}{۳}} \frac{۵m+۱}{۳m-۱}=\frac{۶}{m}$

$\xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} ۵m^{۲}+m=۱۸m-۶ \Rightarrow ۵m^{۲}-۱۷m+۶=۰$

$\Rightarrow m=۳$ یا $\frac{۴}{۱۰} \xrightarrow[n=۲]{m=\frac{۴}{۱۰}} \frac{m}{n}=۰/۲$

۳۸- گزینه‌ی «۲»

$\vec b\parallel\vec a \Rightarrow \vec b=m\vec a \Rightarrow \vec b=(۲m,-m,m)$

$\xrightarrow{\text{اندازه}} \sqrt{۴m^{۲}+m^{۲}+m^{۲}}=۶$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۶m^{۲}=۳۶ \Rightarrow m=\pm\sqrt{۶}$

$\Rightarrow \vec b=(۲\sqrt{۶},-\sqrt{۶},\sqrt{۶}) \Rightarrow$ جمع مؤلفه‌ها $=۲\sqrt{۶}$

۳۹- گزینه‌ی «۲»

$\overrightarrow{AB}=B-A=(m-۱,n-۲,-۲)$

$\overrightarrow{AC}=C-A=(-۲,-۱,-۱)$

$\xrightarrow{C,B,A\ \text{هم‌خط}} \overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{AC} \Rightarrow \frac{m-۱}{-۲}=\frac{n-۲}{-۱}=\frac{-۲}{-۱}$

$\Rightarrow \begin{cases} n-۲=-۲ \Rightarrow n=۰\\ m-۱=-۴ \Rightarrow m=-۳\end{cases} \Rightarrow m+n=-۳$

۴۰- گزینه‌ی «۱»

$\vec a=(k,\frac{۱}{۳},\sqrt{۷}k) \xrightarrow{a\ \text{یکه}} \sqrt{k^{۲}+\frac{۱}{۹}+۷k^{۲}}=۱$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۸k^{۲}+\frac{۱}{۹}=۱ \Rightarrow ۸k^{۲}=\frac{۸}{۹} \Rightarrow k=\pm\frac{۱}{۳}$

$\xrightarrow{k=\frac{۱}{۳}} \vec b=(-\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳},-\frac{۲}{۳})$

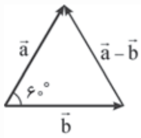
$\xrightarrow{\text{اندازه}} |\vec b|=\sqrt{\frac{۱}{۹}+\frac{۴}{۹}+\frac{۴}{۹}}=۱$

۴۱- گزینه‌ی «۴»

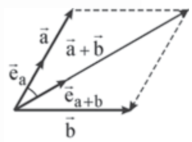
$۲\vec{a}+\vec{b}=(۲,۲,-۲)+(۱,۲,۲)=(۳,۴,۰)$

$\xrightarrow{\text{اندازه}} \sqrt{۹+۱۶+۰}=۵ \xrightarrow{\text{بردار جهت}} \frac{۱}{۵}(۳,۴,۰)=(\frac{۳}{۵},\frac{۴}{۵},۰)$

۴۲- گزینه‌ی «۱»



معنی $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ می‌شه مثلث متساوی‌الاضلاع!



اما $\vec{e}_{a+b}$ هم‌جهت $\vec{a}+\vec{b}$ است و $\vec{e}_a$ هم‌جهت با $\vec{a}$ و زاویه‌ی $\vec{a}+\vec{b}$ با $\vec{a}$ هم می‌شود $۳۰°$! آخه چهارضلعی لوزی خواهد بود ...

۴۳- گزینه‌ی «۱»

بردار جهت $|۲\vec{a}+۳\vec{b}|\,\vec{a}+\vec{b}$، همان بردار جهت $\vec{a}+\vec{b}$ است. چون ضریب $|۲\vec{a}+۳\vec{b}|$ عددی مثبت است!

$\vec{a}+\vec{b}=(۱,۲,۲) \xrightarrow{\text{اندازه}} \sqrt{۱+۴+۴}=۳$

$\xrightarrow{\text{بردار یکه}} \frac{۱}{۳}(۱,۲,۲)=(\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳})$

۴۴- گزینه‌ی «۲»

ضلع سوم مثلث، تفاضل دو بردار داده‌شده است:

$$\left.\begin{array}{l} \text{ضلع اول}=\vec{i}+\vec{j} \xrightarrow{\text{اندازه}} \sqrt{۲} \\ \text{ضلع دوم}=\vec{j}-\vec{k} \xrightarrow{\text{اندازه}} \sqrt{۲} \\ \text{ضلع سوم}=(\vec{i}+\vec{j})-(\vec{j}-\vec{k})=\vec{i}+\vec{k} \xrightarrow{\text{اندازه}} \sqrt{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{محیط}} ۳\sqrt{۲}$$

۴۵- گزینه‌ی «۲»

فرض کنید $۲\vec{a}=\vec{X}$ و $۳\vec{b}=\vec{Y}$، پس $|\vec{X}|=|\vec{Y}|=|\vec{X}-\vec{Y}|$ و این هم یعنی $\vec{X}$ و $\vec{Y}$ به صورت مثلث متساوی‌الاضلاع می‌شوند. پس $\alpha=۶۰°$، $\beta=۱۲۰°$ (چون دنبال هم هستند!) و $\gamma=۶۰°$ است. پس گزینه‌ی (۲) درست است.

لازم به ذکر است که $۲\vec{a}$ هم‌جهت $\vec{a}$ و $۳\vec{b}$ هم‌جهت $\vec{b}$ است!

۴۶- گزینه‌ی «۳»

$|\vec{a}|=\sqrt{۱+۴+۴}=۳ \quad , \quad |\vec{b}|=\sqrt{۹+۱۶+۰}=۵$

$\Rightarrow \text{نیمساز}=|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}=۵\vec{a}+۳\vec{b}$

$=(-۵,-۱۰,۱۰)+(۹,-۱۲,۰)=(۴,-۲۲,۱۰) \xrightarrow{\div ۲} (۲,-۱۱,۵)$

۴۷- گزینه‌ی «۳»

اگر زاویه‌ی بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$، θ باشد، زاویه‌ی بین $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ با $\vec{b}$ برابر $\frac{\theta}{۲}$ است. آخه $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ فرمول نیمسازه!

پس: $۲(\alpha+۱۰)°=(۳\alpha+۵)° \Rightarrow \alpha=۱۵$

۴۸- گزینه‌ی «۲»

$\overrightarrow{AB}=B-A=(۱,-۱,-۱)$

$\overrightarrow{AC}=C-A=(-۱,۱,۱)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-۱)+(-۱)+(-۱)=-۳$

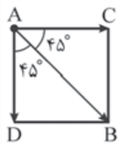
۴۹- گزینه‌ی «۴»

$۳\vec{a}=(۳,۰,۶)$

$۲\vec{b}+\vec{c}=(-۴,۲,۲)+(۳,۲,۲)=(-۱,۴,۴)$

$\Rightarrow (۳\vec{a})\cdot(۲\vec{b}+\vec{c})=(-۳)+۰+۲۴=۲۱$

۵۰- گزینه‌ی «۱»



قطر مربع ۲ باشه، ضلع‌هایش می‌شوند $\frac{۲}{\sqrt{۲}}$. یعنی $\sqrt{۲}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos ۴۵°+|\overrightarrow{AB}|^{۲}+|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos ۴۵°$

$=۲\times\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}+۲^{۲}+۲\times\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۲+۴+۲=۸$

۵۱- گزینه‌ی «۱»

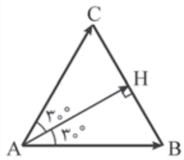
ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، می‌شه $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$. پس:

$|AH|=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۲)=\sqrt{۳}$

حالا: $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=|\overrightarrow{AH}|^{۲}+|\overrightarrow{AH}||\overrightarrow{AB}|\cos ۳۰°+|\overrightarrow{AH}||\overrightarrow{AC}|\cos ۳۰°$

$=(\sqrt{۳})^{۲}+\sqrt{۳}\times۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\sqrt{۳}\times۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۳+۳+۳=۹$



می‌دونی که ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع، نیمساز زاویه‌هاش هم هست!؟

۵۲- گزینه‌ی «۱»

$\vec{a}\cdot\vec{b}>۰ \Leftarrow$ زاویه‌ی بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ حاده است.

$\Rightarrow x(۲x)+x(-۳)+(-۱)(-۱)>۰ \Rightarrow ۲x^{۲}-۳x+۱>۰$

$\xrightarrow{x=۱\,,\,\frac{۱}{۲}} x>۱$ یا $x<\frac{۱}{۲}$ ①

زاویه‌ی بین محور Oy و $\vec{b}$ منفرجه است.

$\Rightarrow$ زاویه‌ی بین $\vec{j}$ و $\vec{b}$ منفرجه است

$\Rightarrow \vec{b}\cdot\vec{j}<۰ \xrightarrow{j=(۰,۱,۰)} x<۰$ ②

① $\cap$ ② $\Rightarrow x<۰$

۵۳- گزینه‌ی «۲»

$\overrightarrow{AB}=B-A=(۰,m-۱,۱)$

$\overrightarrow{BC}=C-B=(m,۱-m,۱)$

$\xrightarrow{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=۰} ۰+\underbrace{(m-۱)(۱-m)}_{-(m-۱)^{۲}}+۱=۰$

$\Rightarrow |m-۱|=۱ \Rightarrow m=۲$ یا ۰

۵۴- گزینه‌ی «۱»

$\vec a-\vec b=(۱,۴,۰)=\vec x \quad , \quad \vec b=(۱,-۱,۱)=\vec y$

$\Rightarrow \cos\theta=\frac{\vec x\cdot\vec y}{|\vec x||\vec y|}=\frac{۱-۴+۰}{\sqrt{۱۷}\sqrt{۳}}=\frac{-۳}{\sqrt{۱۷}\sqrt{۳}}$

$\Rightarrow \cos\theta=-\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۱۷}}=-\sqrt{\frac{۳}{۱۷}}$

۵۵- گزینه‌ی «۴»

$|\vec V_۱|=|\vec V_۲| \Rightarrow \sqrt{۴+(a+۱)^۲+۱۶}=\sqrt{a^۲+۱۶+۹}$

$\xrightarrow[\text{اتحاد}]{\text{توان ۲}} a^۲+۲a+۲۱=a^۲+۲۵ \Rightarrow a=۲$

$a=۲ \Rightarrow \begin{cases}\vec V_۱=(۲,۳,۴)\\ \vec V_۲=(۲,۴,۳)\end{cases}$

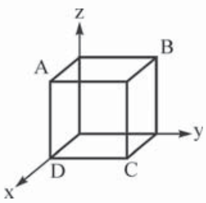
$\Rightarrow \cos\theta=\frac{\vec V_۱\cdot\vec V_۲}{|\vec V_۱||\vec V_۲|}=\frac{۴+۱۲+۱۲}{\sqrt{۲۹}\sqrt{۲۹}}=\frac{۲۸}{۲۹}$

۵۶- گزینه‌ی «۱»

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{CA}=A-C=(۱,-۴,۵)\\ \overrightarrow{CB}=B-C=(-۱,-۳,۲)\end{array}\right\} \Rightarrow \cos\theta=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}$

$=\frac{-۱+۱۲+۱۰}{\sqrt{۴۲}\sqrt{۱۴}} \Rightarrow \cos\theta=\frac{۲۱}{\sqrt{۴۲}\sqrt{۱۴}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \theta=۳۰^\circ$

۵۷- گزینه‌ی «۲»



$A=(۳,۰,۳) \quad , \quad B=(۰,۳,۳)$

$C=(۳,۳,۰) \quad , \quad D=(۳,۰,۰)$

$\overrightarrow{AB}=B-A=(-۳,۳,۰)$

$\overrightarrow{AC}=C-A=(۰,۳,-۳)$

$\overrightarrow{AD}=D-A=(۰,۰,-۳)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=(۰+۹+۰)+(۰+۰+۹)=۱۸$

۵۸- گزینه‌ی «۲»

روش اول: طبق گفته‌ی تست، $\vec a\cdot(\vec X+\vec Y)\neq ۰$. حالا بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌ی (۱): $\vec X=-\vec Y \Rightarrow \vec X+\vec Y=\vec o \Rightarrow \vec a\cdot(\vec X+\vec Y)=۰$

گزینه‌ی (۲): $\vec a\perp\vec X$ است ولی $\vec a$ بر $\vec Y$ عمود نیست! $\vec a\cdot\vec X=۰$ می‌شود ولی $\vec a\cdot\vec Y\neq ۰$.

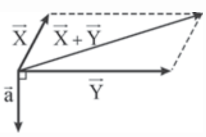
عبارت $\vec a\cdot(\vec X+\vec Y)$ را به صورت $\vec a\cdot\vec X+\vec a\cdot\vec Y$ می‌نویسیم تا معلوم شود، صفر نمی‌شود.

گزینه‌ی (۳): $\vec a\perp\vec X \quad , \quad \vec a\perp\vec Y \quad , \quad \vec X\perp\vec Y$

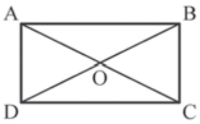
$\Rightarrow \vec a\cdot\vec X=\vec a\cdot\vec Y=\vec X\cdot\vec Y=۰ \Rightarrow \vec a\cdot\vec X+\vec a\cdot\vec Y=۰$ ✓

گزینه‌ی (۴): چون $\vec a$ بر صفحه‌ی دو بردار عمود است، پس بر هر برداری در این صفحه، یعنی $\vec X+\vec Y$، عمود است؛ پس $\vec a\cdot(\vec X+\vec Y)=۰$!

روش دوم: مثال نقض برای گزینه‌ی (۲):



۵۹- گزینه‌ی «۱»



$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$

$=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AC}|\cos۰^\circ=|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AC}|$

اما چون $AB=۱۲$ و $BC=۵$ است، طبق فیثاغورس در مثلث ABC، $AC=۱۳$ می‌شود و $AO=\frac{۱۳}{۲}$.

پس جواب تست می‌شود: $\frac{۱۳}{۲}\times۱۳=\frac{۱۶۹}{۲}$

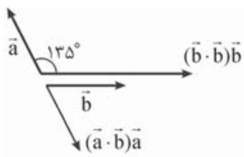
۶۰- گزینه‌ی «۲»

$(۳\vec a+\vec b)\cdot(\vec a+۲\vec b)=۳|\vec a|^۲+\underbrace{۶\vec a\cdot\vec b+\vec b\cdot\vec a}_{۷\vec a\cdot\vec b}+۲|\vec b|^۲$

$=۳(۲)^۲+۷(m)+۲(۳)^۲=۱۴m+۲$

پس: $۱۲+۷m+۱۸=۱۴m+۲ \Rightarrow ۷m=۲۸ \Rightarrow m=۴$

۶۱- گزینه‌ی «۴»



چون $\vec a$ و $\vec b$ زاویه‌ی منفرجه می‌سازند، پس $\vec a\cdot\vec b<۰$. حالا $\frac{(\vec b\cdot\vec b)}{|\vec b|^۲}\vec b$ یعنی ضریب مثبتی از $\vec b$ و در نتیجه هم‌جهت $\vec b$ است؛ ولی $\underbrace{(\vec a\cdot\vec b)}_{\text{عدد منفی}}\vec a$، مخالف جهت $\vec a$!

پس زاویه‌ی این دو، برابر $۱۸۰^\circ-۱۳۵^\circ$ یعنی ۴۵° است.

۶۲- گزینه‌ی «۴»

پخش می‌کنیم:

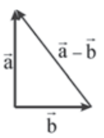
$۲\vec i\cdot(\vec i-۲\vec j+۳\vec k)+\vec j\cdot(۲\vec i-\vec j+\vec k)+۳\vec k\cdot(\vec i+\vec j-\vec k)$

$=۲|\vec i|^۲-۴\underbrace{\vec i\cdot\vec j}_{۰}+۶\underbrace{\vec i\cdot\vec k}_{۰}+۲\underbrace{\vec j\cdot\vec i}_{۰}-|\vec j|^۲+\underbrace{\vec j\cdot\vec k}_{۰}$

$+۳\underbrace{\vec k\cdot\vec i}_{۰}+۳\underbrace{\vec k\cdot\vec j}_{۰}-۳|\vec k|^۲=۲-۱-۳=-۲$

۶۳- گزینه‌ی «۴»

روش اول:



$|\vec a-\vec b|^۲=|\vec a|^۲+|\vec b|^۲-۲\underbrace{\vec a\cdot\vec b}_{۰}=(۲\sqrt{۶})^۲+(۵)^۲$

$\Rightarrow |\vec a-\vec b|^۲=۴۹ \Rightarrow |\vec a-\vec b|=۷$

روش دوم: چون $\vec a\cdot\vec b=۰$، پس $\vec a\perp\vec b$؛ بنابراین در مثلث قائم‌الزاویه، فیثاغورس داریم! ...

۶۴- گزینه‌ی «۲»

$|\vec a+\vec b|^۲+|\vec a-\vec b|^۲=۲(|\vec a|^۲+|\vec b|^۲)$

$\Rightarrow |\vec a+\vec b|^۲+۵^۲=۲(۱۶+۹) \Rightarrow |\vec a+\vec b|=۵$