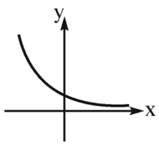
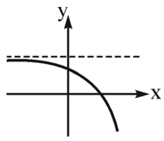
توابع نمایی

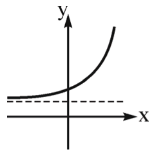


۱- نمودار روبه‌رو، متعلق به یک تابع نمایی با ضابطه‌ی $y=(a^{۲}-۱)x^{۲}+۲^{ax}$ است.
مقدار یا مقادیر ممکن برای a چیست؟

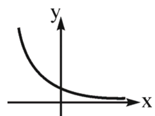
۲- در زیر، چهار نمودار به همراه ضابطه‌ی شش تابع داده شده است که چهارتا از این توابع مربوط به نمودارها هستند. مشخص کنید هر نمودار، متعلق به کدام تابع است.



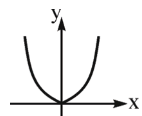
(۱)



(۲)



(۳)

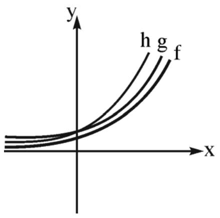


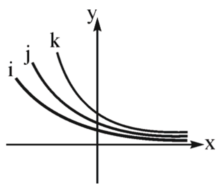
(۴)

الف) $y=(\frac{۱}{\pi})^{x}$ ب) $y=۲(۱-(۰/۳)^{۱-x})$ ج) $y=-۳\times(۰/۵)^{x}+۱$

د) $y=(\frac{۱}{۴})^{-x+۲}+۱$ ه) $y=x^{۲}$ و) $y=۲^{|x|}-۱$

۳- نمودار شش تابع نمایی در دو دستگاه روبه‌رو رسم شده است و ضابطه‌ی این توابع هم بدون هیچ‌گونه ترتیبی، در بین ۹ ضابطه‌ای که در زیر آمده، دیده می‌شود. ضابطه‌ی هر تابع را معلوم کنید.





$y_{۱}=۲^{-x}$ $y_{۲}=۴^{x}$ $y_{۳}=۲(۰/۱)^{x}$ $y_{۴}=۲^{x}$ $y_{۵}=۰/۱\times۲^{\frac{x}{۲}}$

$y_{۶}=۲^{۱-x}$ $y_{۷}=۴^{-x}$ $y_{۸}=۰/۵\times(\frac{۱}{۲})^{x}$ $y_{۹}=۴^{۱-x}$

۴- در هر یک از حالت‌های زیر، مشخص کنید نمودارهای دو تابع f و g یکدیگر را در چند نقطه قطع می‌کنند و نقطه یا نقاط تلاقی آن‌ها سمت چپ محور y هاست یا روی این محور یا سمت راست آن.

الف) $f(x)=۵^{x}\ ,\ g(x)=۳\times۴^{x}$ ب) $f(x)=۲\times(\frac{۱}{۷})^{۲x}\ ,\ g(x)=\frac{۱}{۲}\times(۰/۱)^{x}$

ج) $f(x)=۳^{x}\ ,\ g(x)=۲\pi^{x}$ د) $f(x)=۳\times۲^{۱-x}\ ,\ g(x)=۲\times۳^{x-۱}$

۵- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=\sqrt{۳^{۲x+۱}}$ ب) $y=\frac{x^{۲x}}{(۲x)^{۲x}}$ ج) $y=-\pi^{\sin^{۲}x+\cos^{۲}x-۲x}$

د) $y=۱+۵^{-x}-۵^{۱-x}$ ه) $y=\frac{۱۲^{x}-۴^{x}}{۹^{x}-۳^{x}}$

۶- دامنه‌ی تابع f، $\mathbb{N}$ است و برای هر عدد طبیعی مانند n، $f(n)$ برابر است با مقدار جمله‌ی nاُم یک دنباله‌ی هندسی که جمله‌ی اول و قدرنسبت آن به ترتیب $-\frac{\sqrt{۳\sqrt{۲}}}{۲}$ و $\frac{۱+\sqrt[۵]{۷}}{۳}$ است. نمودار تابع f را رسم کنید.

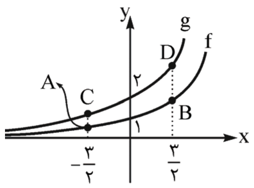
۷- هر یک از معادله‌های زیر، چند جواب دارند؟

الف) $x+۲^x=۲$ **ب)** $۳^x=\sqrt[۳]{x}$ **ج)** $۷^x=x۵^x$ **د)** $۲^{-x}-x^۲=۰$

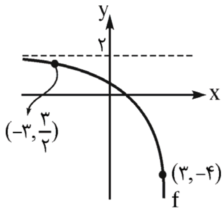
۸- a ،b ،c و d اعداد حقیقی ثابت‌اند به‌طوری‌که $b>۰$ و $ac\neq ۰$. اگر برای هر عدد حقیقی x، $f(x)=ab^{cx}$ باشـد و $f(x_۱)=y_۱$ و $f(x_۲)=y_۲$، مقدار $f(\frac{x_۱+x_۲}{۲})$ برحسب $y_۱$ و $y_۲$ چیست؟

۹- f یک تابع نمایی با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ و برد $(۰,+\infty)$ است. اگر $f(۴)=۴$ و $f(۲۰)=۲۰$ باشد، مقدار $f(۱۲)$ چیست؟

۱۰- در شکل روبه‌رو، توابع f و g نمایی هستند. مقدار $y_Ay_B+y_Cy_D$ را به دست آورید.
(y_X یعنی عرض نقطه‌ی X.)



۱۱- در شکل روبه‌رو، f تابع نمایی است. عرض از مبدأ نمودار f چیست؟



۱۲- جدول روبه‌رو مربوط به تابع f است. مقادیر a و b را طوری بیابید که:

x	۲	۴	۶	۸
f(x)	۵	a	۱۰	b

الف) f تابع خطی باشد.

ب) f تابع نمایی (به فرم $y=mn^{px}$) باشد.

۱۳- f تابعی نمایی است. با توجه به جدول روبه‌رو، مقدار m چیست؟

x	۱	۴	۷	۱۰	۱۳
f(x)	۴	۶	۱۲	m	۲۲۸

۱۴- $f(x)=۲^x$ و $g(x)=۳^x$ است. اگر $f(۳^{۲a})g(۲^{۳b})+f(۳^{۲a}+۳)g(۲^{۳b}+۲)=۱۷۵۲$ باشد، مقدار $a+b$ چیست؟

۱۵- اگر $f(x)=x^{-۳}-۱$ و $g(x)=x^۲+|x|-۲$ باشد، نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=f(x)^{g(x)}$، در چند نقطه خط $y=۱$ را قطع می‌کند؟

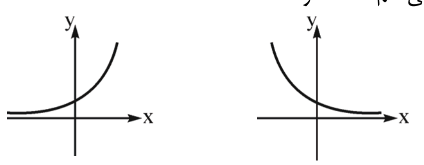
۱۶- اگر $f(x)=x^۲-x-۱$ باشد، نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=f(x)^{f(x)}$، در چند نقطه خط $y=۱$ را قطع می‌کند؟

پاسخ ۱

تـابع نـمایی

یادتان هست بچه که بودید، تا $\square^{\bigcirc}$ را می‌دیدید، می‌گفتند $\square$ «پایه» است و $\bigcirc$ «توان» ؟! بعدش هم می‌گفتند ببین بچه (!)، توان همان «نما» است؟! خب حالا که بزرگ شده‌اید، این را یاد بگیرید که اگر در ضابطه‌ی یک تابع، متغیر در توان (همان نما!) باشد، به تابع می‌گوییم «نمایی»! (البتـه پایـه هـم بایـد عددی ثابت، مثبت و مخالف ۱ باشد.) مثل $y=2^x$.

- ساده‌ترین تابع نمایی، $y=a^x$ است که a یک عدد حقیقی ثابت، مثبت و مخالف ۱ است. تکرار می‌کنم: $a>0$ و $a\neq 1$.
- نمودار تابع نمایی با ضابطه‌ی $y=a^x$ به یکی از دو صورت روبه‌رو است:



$1<a$ $\quad$ $0<a<1$

- حواستان باشد که:

– a^x همیشه مثبت است و نمودار $y=a^x$ هم بالای محور x هاست.

– نمودار $y=a^x$ همیشه از نقطه‌ی $(0,1)$ می‌گذرد.

– وقتی $a>1$، نمودار صعودی است، یعنی با افزایش x، y هم زیاد می‌شود؛ اما وقتی $0<a<1$، نمودار نزولی است، یعنی با افزایش x، y کم می‌شود.

– نمودار $y=a^x$ محور x ها را قطع نمی‌کند، اما خیلی به آن نزدیک می‌شود، حتی نزدیک‌تر از اونی که شما و کل همکلاسی‌هـاتون مـی‌تـونین تـصور کنین. وقتی $a>1$، به ازای x های منفی و خیلی کوچک این اتفاق می‌افتد و وقتی $0<a<1$، به ازای x های مثبت و خیلی بزرگ. بزرگ قد یه دنیا!

- پرکاربردترین تابع نمایی (در اقتصاد، زیست و ...)، $y=e^x$ است. به e می‌گویند عدد «نِپِر». e عددی گنـگ و مقـدار تقریبـی آن ۲/۷۱۸ اسـت. ایـن چیزهایی که می‌گویم را یاد بگیرید؛ برای آینده‌تان خوب است!
- کلاً توابع با ضابطه‌ی $y=ab^{cx}+k$ رفتار نمایی دارند. ($0<b$ ، $b\neq 1$ و $ac\neq 0$)

چون تابع نمایی است، x باید در توان باشد؛ یعنی جمله‌ی $(a^2-1)x^2$ را در ضابطه‌ی تابع نباید داشته باشـیم. پـس $a^2-1=0$ و در نتیجـه $a=\pm 1$.
در این صورت ضابطه‌ی تابع به صورت $y=2^{\pm x}$ درمی‌آید، یعنی $y=2^x$ یا $y=(\frac{1}{2})^x$. اما نمودار تابع نزولی (سرپایینی) است، یعنی با افزایش x، y کم می‌شود، پس $y=2^x$ قبول نیست و فقط $y=(\frac{1}{2})^x$ قبول است. حواستان باشد که نمودار $y=2^x$ صعودی (سربالایی) است، چون $2>1$.

پاسخ ۲

بـررسی کلی نمودارهـای نمـایی

به طور کلی، توابعی که رفتارشـان نمـایی اسـت، نمـوداری شـبیه بـه یکـی از چهـار نمـودار زیـر دارنـد. بـا فـرض ایـن‌کـه ضـابطه‌ی ایـن توابـع بـه صورت $y=ab^{cx}+k$ است، در هر حالت در مورد علامت یا حدود پارامترهای a، b و c نیز نظر داده‌ایـم؛ پـارامتر k فقـط موجـب انتقـال در راسـتای محور y ها می‌شود.

$a<0$ $\quad$ $0<a$ $\quad$ $a<0$ $\quad$ $0<a$

$\begin{cases}0<b<1\\0<c\end{cases}$ یا $\begin{cases}1<b\\c<0\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases}1<b\\0<c\end{cases}$ یا $\begin{cases}0<b<1\\c<0\end{cases}$

حواستان باشد که:

- وقتی $a > ۰$، نمودار بالای خط‌چین است و وقتی $a < ۰$، پایین آن.
- وقتی $b > ۱$، نمودار صعودی است اگر a و c هم‌علامت باشند وگرنه نزولی است.
- وقتی $۰ < b < ۱$، نمودار صعودی است اگر a و c مختلف‌العلامت باشند وگرنه نزولی است.
- میزان انحنا (فشردگی و کشیدگی در راستای افقی و عمودی) به مقادیر دو پارامتر a و c بستگی دارد.

خلاصه‌ی اخبار:

نمودار ۱ مال «ب» است. نمودار ۲ مال «د» است. نمودار ۳ مال «الف» است. نمودار ۴ مال «و» است.

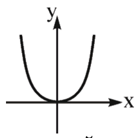
مشروح اخبار: ضابطه‌ی تابع را کلاً $y = ab^{cx} + k$ می‌گیریم.

نمودار ۱ : چون منحنی زیر خط‌چین است، $a < ۰$، پس «ب» یا «ج» درست است و چون نمودار نزولی (سرپایینی) است، یکی از دو حالت «$۱ < b , ۰ < c$» یا «$۰ < b < ۱ , c < ۰$» را باید داشته باشیم. در «ج»، $b = ۰/۵ , c = ۱$، پس قبول نیست. در «ب» که به صورت $y = -۲ \times (۰/۳)^{-x+۱} + ۲$ نوشته می‌شود، $b = ۰/۳ , c = -۱$، پس خودشه!

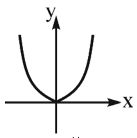
نمودار ۲ : چون منحنی بالای خط‌چین است، $a > ۰$ و چون منحنی انتقال‌یافته‌ی ab^{cx} به بالاست، $k > ۰$. این مشخصات در «د» دیده می‌شود. صعودی‌بودن نمودار هم در این ضابطه رعایت شده است.

نمودار ۳ : هیچ انتقالی در راستای محور yها نداریم ($y = ab^{cx}$ انتقال نیافته!)، پس $k = ۰$. تابلو شد که «الف» درست است. نزولی‌بودن نمودار هم با $۱ > \frac{۱}{\pi} > ۰$ مطابقت دارد.

نمودار ۴ : شبیه $y = x^۲$ است، اما $y = x^۲$ نیست! چون در مبدأ نوک‌تیز است!

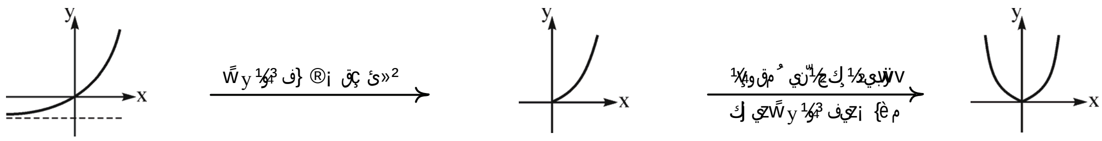


$y = x^۲$



$y \neq x^۲$ (!)

این‌جا را ببینید:

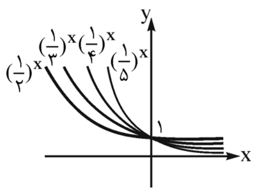


$y = ۲^{|x|} - ۱$ $\quad$ $y = ۲^x - ۱ \quad , \quad x \geq ۰$ $\quad$ $y = ۲^x - ۱$

پاسخ ۳

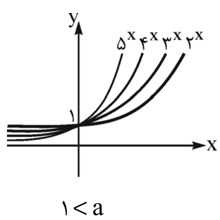
وضعیت نمودارهای توابع‌نمایی نسبت به یکدیگر

- اگر در یک دستگاه مختصات، نمودار تمام توابع نمایی به فرم $y = a^x$ را رسم کنیم، همه‌ی نمودارها در یک نقطه یعنی $(۰,۱)$ یکدیگر را قطع می‌کنند. (در شکل‌های زیر، برای شلوغ‌نشدن شکل‌ها، این کار را در دو دستگاه و برای تعدادی از توابع انجام داده‌ایم.)



$۰ < a < ۱$

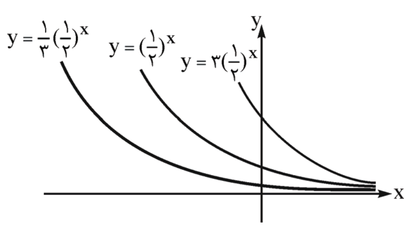
هرچه a بزرگ‌تر باشد، منحنی در راستای افقی کشیده‌تر است.

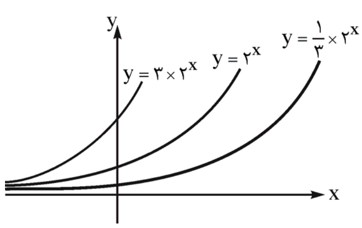


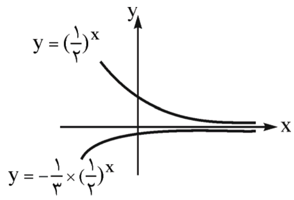
$۱ < a$

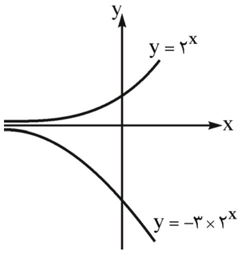
هرچه a بزرگ‌تر باشد، منحنی در راستای افقی فشرده‌تر است.

- اگر $b = d$ و $a \neq c$ باشد، نمودارهای دو تابع نمایی $y = ab^x$ و $y = cd^x$ یکدیگر را قطع نمی‌کنند.





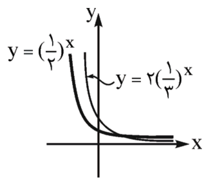




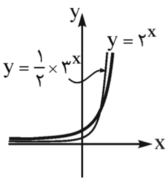
● این هم یک نکته‌ی واضح دیگر: اگر a و c هم‌علامت باشند و نمودار دو تابع نمایی $y=ab^x$ و $y=cd^x$ همدیگر را قطع نکنند، b و d یا هر دو بین صفر و یک‌اند، یا هر دو بزرگ‌تر از یک.

● نمودارهای دو تابع نمایی به فرم‌های $y=ab^x$ و $y=cd^x$ حداکثر یک نقطه‌ی تلاقی دارند. برای تشخیص موقعیت دو نمودار نسبت هم، در حالتی که یکدیگر را قطع می‌کنند، نقطه‌یابی در محدوده‌ی تقاطع (سمت چپ یا راست محور x ها) مؤثر است. کاری که ما در جدول‌های پایین کرده‌ایم. با این کار حتی می‌توان تقریبی از نقطه‌ی تقاطع دو نمودار را به دست آورد.

x	0	1	2
$(\frac{1}{2})^x$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$2(\frac{1}{3})^x$	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$



x	0	1	2
2^x	1	2	4
$\frac{1}{2}\times 3^x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$



(در هر جدول، در ستون‌های دوم و سوم، دور عدد بزرگ‌تر را نقطه‌چین کشیده‌ایم.) حواستان باشد که نهایتاً نموداری که رشد بیشتری دارد، بالاتر می‌رود. یعنی درست است که مثلاً $\frac{1}{2}\times 3^x$ بعضی جاها زیر 2^x قرار می‌گیرد، اما همه‌ی ما می‌دانیم که 3^x قوی‌تر از 2^x است و در نهایت به آن می‌چربد و نمودارش بالاتر می‌رود. ضعف اول کار $\frac{1}{2}\times 3^x$ هم فقط به خاطر همین ضریب $\frac{1}{2}$ بوده است! کلاً چیزی که رشد را تعیین کند، پایه است (b در b^x).

خلاصه‌ی اخبار:

$f(x)=y_5=0/1\times 2^{\frac{x}{2}}$ $g(x)=y_4=2^x$ $h(x)=y_2=4^x$

$i(x)=y_8=0/5(\frac{1}{2})^x$ $j(x)=y_1=2^{-x}$ $k(x)=y_6=2^{1-x}$

مشروح اخبار:

f ، g و h صعودی‌اند (سربالایی!)، پس باید در بین ضابطه‌های y_2 ، y_4 و y_5 که پایه‌ی آن‌ها (a در a^x) بزرگ‌تر از ۱ است، search کنیم! حواستان هم باشد که $y_5=0/1\times(\sqrt{2})^x$. نمودار f پایین‌تر از g و h است، پس f تابع y_5 است که هم پایه‌ی آن ($\sqrt{2}$) کوچک‌تر است (از ۲ و ۴) و هم ضریب آن (۰/۱). g و h یکدیگر را قطع کرده‌اند، اما در نهایت h بالاتر قرار گرفته، پس پایه در ضابطه‌ی h بزرگ‌تر است، یعنی $h(x)=4^x$ و $g(x)=2^x$.

i ، j و k نزولی‌اند (سرپایینی!)، پس y_2 ، y_4 و y_5 نمی‌توانند متعلق به آن‌ها باشند. حالا ببینید:

$y_1=2^{-x}=(\frac{1}{2})^x$ $y_3=2(0/1)^x$ $y_6=2^{1-x}=2\times 2^{-x}=2(\frac{1}{2})^x$

$y_7=4^{-x}=(\frac{1}{4})^x$ $y_8=0/5(\frac{1}{2})^x$ $y_9=4^{1-x}=4(\frac{1}{4})^x$

y_1 ، y_6 و y_8 پایه‌های مساوی ($\frac{1}{2}$) با ضریب‌های نامساوی (به ترتیب ۱، ۲ و ۰/۵) دارند، پس برای این‌که نمودارها همدیگر را قطع نکنند، انتخاب مناسبی است. با توجه به این‌که i پایین، j وسط و k بالاست، $i(x)=0/5(\frac{1}{2})^x$ ، $j(x)=(\frac{1}{2})^x$ و $k(x)=2(\frac{1}{2})^x$.

ببینید انتخاب دیگری وجود دارد یا نه.

پاسخ ۴

الف اگر x منفی باشد، ۴^x همیشه از ۵^x بزرگ‌تر است و در نتیجه ۳×۴^x هم همین‌طور! یعنی در سمت چپ محور yها همیشه نمودار g بالاتر از نمودار f است. روی محور yها هم که نقطه‌ی تلاقی ندارند، پس یا نقطه‌ی تلاقی سمت راست محور yهاست، یا اصلاً نقطه‌ی تلاقی‌ای وجود ندارد! رشد ۵^x از رشد ۴^x بیشتر است، اما ضریب ۳ باعث می‌شود ۳×۴^x در یک محدوده‌ای، بالاتر از ۵^x قرار بگیرد. یعنی نقطه‌ی تلاقی وجود دارد. جواب این قسمت، یک نقطه‌ی تلاقی و سمت راست محور yهاست. جدول زیر هم این موضوع را تأیید می‌کند و حتی می‌گوید: طول نقطه‌ی تلاقی بین ۴ و ۵ است.

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۵^x	۱	۵	۲۵	۱۲۵	۶۲۵	۳۱۲۵
۳×۴^x	۳	۱۲	۴۸	۱۹۲	۷۶۸	۳۰۷۲

ب $g(x)=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۱۰})^x$ و $f(x)=۲\times(\frac{۱}{۷})^{۲x}=۲(\frac{۱}{۴۹})^x$. باز هم اگر x منفی باشد، $(\frac{۱}{۴۹})^x$ بزرگ‌تر از $(\frac{۱}{۱۰})^x$ است و در نتیجه:

$$x<۰ \Longrightarrow \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۱۰})^x<۲(\frac{۱}{۴۹})^x \Longrightarrow g(x)<f(x)$$

به ازای $x=۰$ هم که $f(x)\neq g(x)$. ببینیم وقتی $x>۰$، چه اتفاقی می‌افتد؛ در این حالت رشد $(\frac{۱}{۱۰})^x$ بیشتر از $(\frac{۱}{۴۹})^x$ است، اما ضریب $\frac{۱}{۲}$ برای $(\frac{۱}{۱۰})^x$ و ضریب ۲ برای $(\frac{۱}{۴۹})^x$ باعث می‌شود یک جاهایی در سمت راست محور yها، $\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۱۰})^x$ زیر $۲(\frac{۱}{۴۹})^x$ باشد. پس جواب این قسمت هم مثل «الف» یک نقطه‌ی تلاقی سمت راست محور yهاست.

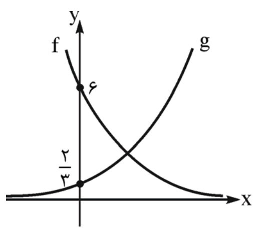
ج $\pi\simeq۳/۱۴$. اگر x مثبت باشد، $۳^x<\pi^x$. پس:

$$۰<x \Longrightarrow ۳^x<۲\pi^x \Longrightarrow f(x)<g(x)$$

به ازای $x=۰$ هم که $f(x)\neq g(x)$. وقتی $x<۰$، $۳^x>\pi^x$. اما ضریب ۲ برای π^x باعث می‌شود $۲\pi^x$ یک جاهایی سمت چپ محور yها از ۳^x بیشتر شود. پس جواب این قسمت یک نقطه‌ی تلاقی سمت چپ محور yهاست.

د $g(x)=۲\times۳^{x-۱}=\frac{۲}{۳}(۳^x)$ $\qquad$ $f(x)=۳\times۲^{۱-x}=۶(\frac{۱}{۲})^x$

f نزولی (سرپایینی!) و g صعودی (سربالایی) است، پس حتماً همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. اما کجا؟ روی محور yها که نیست. با رسم نمودارهای تقریبی، همه چیز معلوم می‌شود. فقط کافی است به محل برخورد نمودارها با محور yها و صعودی یا نزولی بودن آن‌ها توجه کنیم.

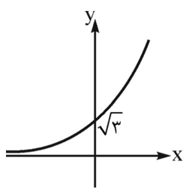


چون $۶=f(۰)>g(۰)=\frac{۲}{۳}$، با توجه به صعودی‌بودن g و نزولی‌بودن f، معلوم می‌شود که نقطه‌ی تلاقی سمت راست محور yهاست. اگر $f(۰)<g(۰)$ می‌شد، نقطه‌ی تلاقی می‌رفت سمت چپ محور yها.

پاسخ ۵

الف

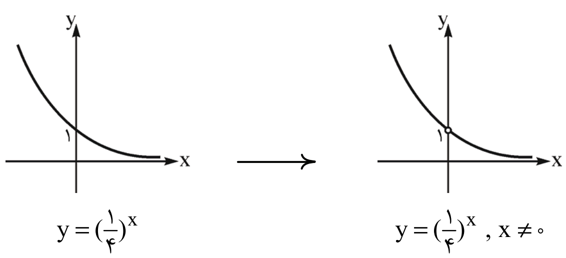
$$y=\sqrt{۳^{۲x+۱}}=(۳^{۲x+۱})^{\frac{۱}{۲}}=۳^{x+\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۳}\times۳^x$$



نمودار $y=\sqrt{۳}\times۳^x$ شبیه نمودار $y=۳^x$ است که در راستای محور yها قد کشیده! (چون $\sqrt{۳}>۱$) در ضمن $۳>۱$ و در نتیجه نمودار سربالایی است، یعنی با زیادشدن x، y هم زیاد می‌شود. یک چیز دیگر؛ $y=\sqrt{۳}\times۳^x$ از نقطه‌ی $(۰,\sqrt{۳})$ می‌گذرد.

ب

$$y=\frac{x^{۲x}}{(۲x)^{۲x}}=\frac{(x^۲)^x}{(۲^۲)^x(x^۲)^x} \Longrightarrow y=\frac{۱}{۴^x}=(\frac{۱}{۴})^x \qquad (x\neq۰)$$

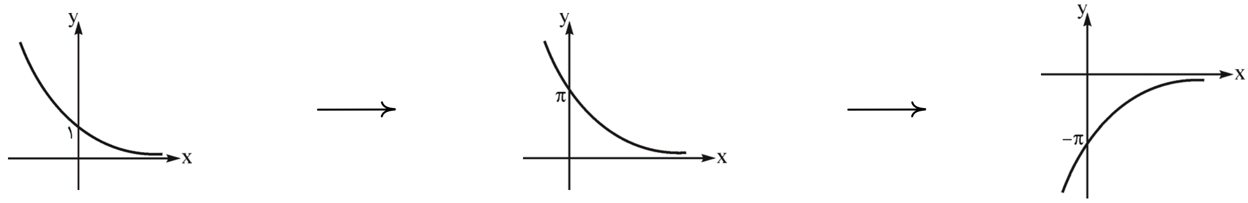


حواستان باشد که چون $x^{۲x}$ داشتیم، x نمی‌توانست صفر باشد ($۰^۰$ تعریف نشده است).

ج همیشه $\sin^{۲} x + \cos^{۲} x = ۱$، پس:

$$y = -\pi^{\sin^{۲} x + \cos^{۲} x - ۲x} = -\pi^{۱-۲x} = -\pi \cdot \pi^{-۲x} = -\pi \cdot (\pi^{-۲})^x \implies y = -\pi \cdot (\frac{۱}{\pi^{۲}})^x$$

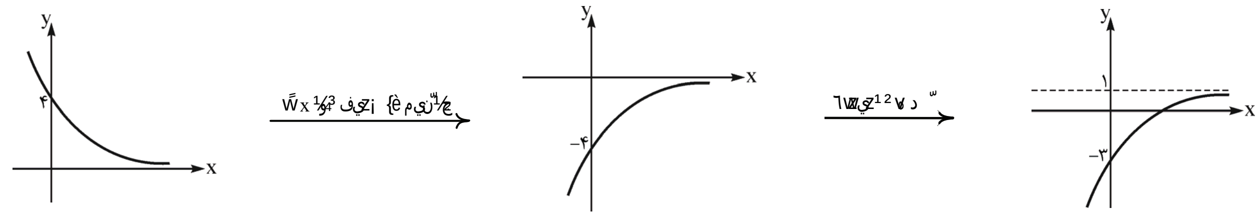
$\pi \simeq ۳/۱۴$، پس $۰ < \frac{۱}{\pi^{۲}} < ۱$ و در نتیجه نمودار تابع نمایی $y = (\frac{۱}{\pi^{۲}})^x$ سرپایینی است. بعد باید این نمودار را در π ضرب کنیم (در راستای محور yها دراز کنیم!) و سپس نسبت به محور xها قرینه نماییم (به خاطر علامت منفی ضریب).



$y = (\frac{۱}{\pi^{۲}})^x$ $\qquad$ $y = \pi(\frac{۱}{\pi^{۲}})^x$ $\qquad$ $y = -\pi(\frac{۱}{\pi^{۲}})^x$

د

$$y = ۱ + ۵^{-x} - ۵^{۱-x} = ۱ + ۵^{-x}(۱ - ۵) = ۱ - ۴(\frac{۱}{۵})^x$$

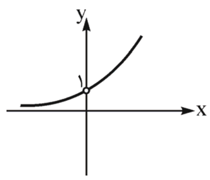


$y = ۴(\frac{۱}{۵})^x$ $\qquad$ $y = -۴(\frac{۱}{۵})^x$ $\qquad$ $y = ۱ - ۴(\frac{۱}{۵})^x$

ه $(۳^x - ۱ \neq ۰ \implies x \neq ۰)$

$$y = \frac{۱۲^x - ۴^x}{۹^x - ۳^x} = \frac{۴^x \cdot ۳^x - ۴^x}{۳^x \cdot ۳^x - ۳^x} = \frac{۴^x(۳^x - ۱)}{۳^x(۳^x - ۱)} \implies y = (\frac{۴}{۳})^x$$

حواستان باشد که $x = ۰$ عضو دامنه‌ی تابع نیست، چون مخرجِ ضابطه‌ی اصلی را صفر می‌کند.

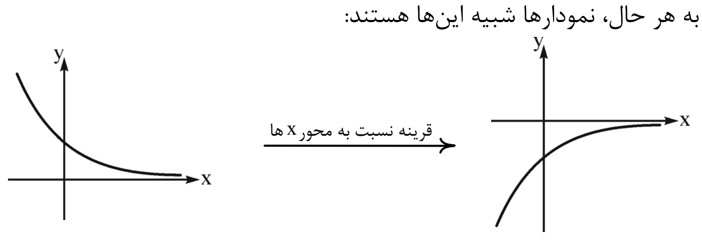


پاسخ ۶

جمله‌ی اول و قدرنسبت را اعداد غیر رُندی داده‌ایم تا با عرض پوزش، نمودار را نتوان با نقطه‌یابی رسم کرد! اگر a_n جمله عمومی یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $a_۱$ و قدرنسبت q باشد، آن‌گاه $a_n = a_۱ q^{n-۱}$. می‌بینید که در دنباله‌های هندسی هم متغیر می‌رود در توان (همان نما!)، پس:

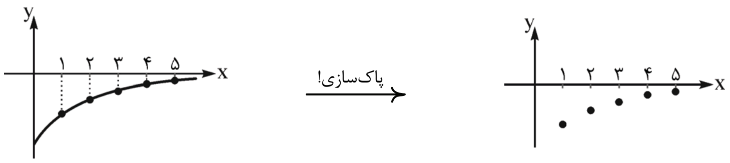
> دنباله‌های هندسی که قدرنسبت آن‌ها مثبت (و مخالف ۱) است، نوعی تابع نمایی هستند.

ما نمودار توابع نمایی را بلدیم. در این سؤال، $f(n) = -\frac{\sqrt{۳\sqrt{۲}}}{۲}(\frac{۱+\sqrt[۵]{۷}}{۳})^{n-۱}$. برای فرار از زُمُختی اعداد (!)، فرض کنیم $A = \frac{\sqrt{۳\sqrt{۲}}}{۲}$ و $B = \frac{۱+\sqrt[۵]{۷}}{۳}$. پس نمودار $f(n) = -AB^{n-۱}$ را می‌خواهیم که $A > ۰$ و $۱ > B > ۰$. کارمان را از نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = AB^{x-۱}$ با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ شروع می‌کنیم. نمودار این تابع، همان نمودار $y = B^x$ است که یک واحد به سمت راست رفته و سپس عرض نقاط آن A برابر شده. حواسمان هست که چون $۱ > B > ۰$، نمودار $y = B^x$ نزولی است، یعنی با افزایش x، مقادیر y کم می‌شود و چون $A > ۱$ ($\sqrt{۳\sqrt{۲}} > \sqrt{۴} = ۲$)، نمودار $y = B^x$ وقتی در A ضرب می‌شود، در راستای محور yها کشیده‌تر می‌شود. به هر حال، نمودارها شبیه این‌ها هستند:



$y = AB^{x-۱}$ $\qquad$ $y = -AB^{x-۱}$

حالا باید دامنه را به $\mathbb{N}$ محدود کنیم. پس اولاً سمت چپ محور yها حذف می‌شود، ثانیاً در سمت راست محور yها، فقط نقاط تلاقی نمودار قبل با خطوط $x = ۱$، $x = ۲$، $x = ۳$ و ... باقی می‌ماند.

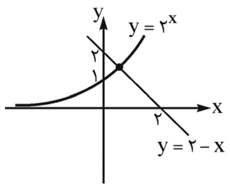


نمودار تابع f از سمت راست ادامه دارد.

پاسخ ۷

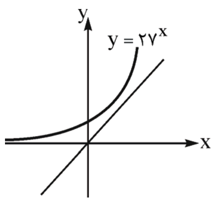
هوس کرده‌ایم این سؤال را با روش هندسی حل کنیم؛ هوسِ به‌جایی است! خب، کلاً تعداد جواب‌های معادله‌ی $f(x)=g(x)$ با تعداد نقـاط تلاقـی نمودارهای $y=f(x)$ و $y=g(x)$ مساوی است.

الف $x+۲^x=۲$، معادل است با $۲^x=۲-x$.



$\Rightarrow$ معادله‌ی $۲^x=۲-x$ یک جواب دارد.

ب $\sqrt[۳]{x}=۳^x$، معادل است با $۲۷^x=x$. (دو طرف را به توان ۳ رساندیم.)



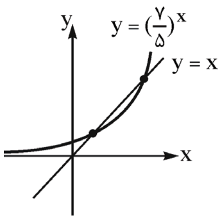
$\Rightarrow$ معادله‌ی $۲۷^x=x$ جواب ندارد.

اما از کجا مطمئن هستیم نمودار $y=۲۷^x$ همیشه بالای نمودار $y=x$ قرار می‌گیرد و هیچ‌وقت آن را قطع نمی‌کند؟ به جدول زیر نگاه کنید:

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...
۲۷^x	۲۷	$۲۷^۲$	$۲۷^۳$	$۲۷^۴$	$۲۷^۵$	$۲۷^۶$	...

با x های منفی که مشکلی نداشتیم. در سمت چپ محور y ها، مطمئن بودیم که نمودار $y=۲۷^x$ بالاتر است. جدول بالا هم این را در کمال وضـوح می‌گوید که x های مثبت هیچ‌وقت نمی‌توانند حریف ۲۷^x شوند و ۲۷^x همیشه یک سروگردن بالاتر است!

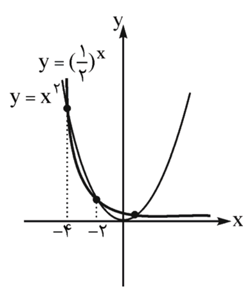
ج $۷^x=x۵^x$ معادل است با $(\frac{۷}{۵})^x=x$. برای تنظیم موقعیت درست نمودارها نسبت به هم، به جدول هم نیاز داریم.



x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$(\frac{۷}{۵})^x$	۱	$\frac{۷}{۵}$	$\frac{۴۹}{۲۵}$	$\frac{۳۴۳}{۱۲۵}$	$\frac{۲۴۰۱}{۶۲۵}$	$\frac{۱۶۸۰۷}{۳۱۲۵}$
عبارت بزرگ‌تر	$(\frac{۷}{۵})^x$	$(\frac{۷}{۵})^x$	x	x	x	$(\frac{۷}{۵})^x$

یعنی اول نمودار $y=(\frac{۷}{۵})^x$ بالای $y=x$ است، بعد می‌رود زیر آن و دوباره می‌آیـد رو. چـون $\frac{۷}{۵}>۱$، $(\frac{۷}{۵})^x$ بـا افـزایش x زیـاد و زیـادتر مـی‌شـود (صعودی است) و در نتیجه وقتی بین ۴ و ۵ از $y=x$ زد بالا، دیگر برای همیشه بالا می‌ماند، چون نمی‌تواند برگردد پایین. پـس نمـودار $y=(\frac{۷}{۵})^x$ نسبت به $y=x$ به همان شکلی است که در بالا رسم کرده‌ایم. طبق این نمودار، معادله‌ی $(\frac{۷}{۵})^x=x$ دو جواب دارد.

د $۲^{-x}-x^۲=۰$ معادل است با $(\frac{۱}{۲})^x=x^۲$.



x	۰	-۱	-۲	-۳	-۴	-۵
$(\frac{۱}{۲})^x$	۱	۲	۴	۸	۱۶	۳۲
$x^۲$	۰	۱	۴	۹	۱۶	۲۵
عبارت بزرگ‌تر	$(\frac{۱}{۲})^x$	$(\frac{۱}{۲})^x$	مساوی	$x^۲$	مساوی	$(\frac{۱}{۲})^x$

در رسم نمودارها دقت کنید و بدون جدول، تصمیمی نگیرید! جدول این قسمت را فقط برای x های منفی تنظیم کردیم، چون وضعیت دو نمودار نسبت به هم در سمت راست محور y ها معلوم بود. به هر حال، نمودار می‌گوید معادله‌ی $(\frac{1}{2})^x = x^2$ سه جواب دارد که یکی مثبت و دوتا منفی است. حتی مقدار دقیق دوتا از جواب‌ها را فهمیدیم. جواب مثبت معادله هم بین صفر و یک است، چون $(\frac{1}{2})^1 < 1^2$. حتی می‌توان به جواب نزدیک‌تر شد و گفت بین $\frac{1}{2}$ و ۱ است، چون $\frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2 < (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

پاسخ ۸

$$y_1 = f(x_1) = ab^{cx_1} \quad , \quad y_2 = f(x_2) = ab^{cx_2}$$

$$f(\frac{x_1+x_2}{2}) = ab^{c(\frac{x_1+x_2}{2})} = ab^{\frac{cx_1}{2}+\frac{cx_2}{2}} = (ab^{\frac{cx_1}{2}})(ab^{\frac{cx_2}{2}}) = (ab^{cx_1})^{\frac{1}{2}}(ab^{cx_2})^{\frac{1}{2}} = (y_1)^{\frac{1}{2}}(y_2)^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow f(\frac{x_1+x_2}{2}) = \sqrt{y_1 y_2}$$

این نتیجه را به خاطر بسپارید:

نمایی بودن یا نبودن!

در توابع نمایی به فرم $y = ab^{cx}$ که دامنه‌ی $\mathbb{R}$ و برد $(0,+\infty)$ یا $(-\infty,0)$ دارند، اگر طول یک نقطه روی نمودار تابع، میانگین حسابی طول دو نقطه‌ی دیگر آن باشد، عرض آن نقطه، میانگین هندسی عرض دو نقطه‌ی دیگر خواهد بود؛ به عبارت دیگر، هرگاه (x_1,y_1)، (x_2,y_2) و (x_3,y_3) سه نقطه روی نمودار چنین تابعی باشند، آن‌گاه:

$$x_3 = \frac{x_1+x_2}{2} \Longrightarrow y_3 = \sqrt{y_1 y_2}$$

کتاب درسی از این مطلب خیلی خوشش آمده و چند تمرین را به آن اختصاص داده. ما هم با پرداختن اساسی به آن، نشان دادیم که به فکرتان هستیم و دوستتان داریم. فقط حواستان باشد که مطلب بالا در مورد توابع نمایی که در راستای محور y ها انتقال یافته‌اند، مثل $y = 1 + 2^x$ و $y = (\frac{1}{3})^x - 1$، لزوماً درست نیست (توابع با ضابطه‌ی $y = ab^{cx} + k$ که $k \neq 0$). این را هم یادآوری می‌کنم که:

میانگین حسابی a و b می‌شود $\frac{a+b}{2}$ و میانگین هندسی a و b می‌شود $\sqrt{ab}$.

پاسخ ۹

$$12 = \frac{4+20}{2} \Longrightarrow f(12) = \sqrt{f(4)f(20)} = \sqrt{4\times 20} = \sqrt{16\times 5} = 4\sqrt{5}$$

پاسخ ۱۰

ضابطه‌های f و g به فرم $y = ab^{cx}$ است، پس اگر طول یک نقطه روی نمودار این توابع میانگین حسابی طول دو نقطه‌ی دیگر آن‌ها باشد، عرض آن نقطه میانگین هندسی عرض دو نقطه‌ی دیگر خواهد بود. به عبارت دیگر، هرگاه (x_1,y_1)، (x_2,y_2) و (x_3,y_3) سه نقطه روی نمودار این توابع باشند، آن‌گاه:

$$x_3 = \frac{x_1+x_2}{2} \Longrightarrow (y_3)^2 = y_1 y_2$$

در نمودار داده‌شده، $x = 0$ میانگین حسابی $x = -\frac{3}{2}$ و $x = \frac{3}{2}$ است، پس:

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ نمودار}: 1^2 = y_A y_B \Longrightarrow y_A y_B = 1 \\ g \text{ نمودار}: 2^2 = y_C y_D \Longrightarrow y_C y_D = 4 \end{array}\right\} \Longrightarrow y_A y_B + y_C y_D = 5$$

پاسخ ۱۱

اگر نمودار f دو واحد به بالا نمی‌رفت (یعنی نمودار $y = ab^{cx}$ در راستای محور y ها حرکت نمی‌کرد)، می‌توانستیم از نکات قبلی استفاده کنیم. حالا هم مشکلی نیست. اگر f را دو واحد به پایین انتقال دهیم، شرایط استفاده از نکات قبلی مهیاست. یعنی با توجه به این‌که $x = 0$ میانگین حسابی $x = -3$ و $x = 3$ است، اگر عرض از مبدأ را y بگیریم، داریم:

$$(y-۲)^۲=(\frac{۳}{۲}-۲)(-۴-۲) \implies (y-۲)^۲=۳ \implies y-۲=\pm\sqrt{۳} \implies y=۲\pm\sqrt{۳}$$

اما با توجه به شکل، عرض از مبدأ کوچک‌تر از ۲ است، پس $y=۲-\sqrt{۳}$.

> این کشف زیبا را هم که حالت کلی‌ترِ اکتشافات قبلی است، به خاطر بسپارید:
>
> در توابع نمایی با ضابطه‌ی $y=ab^{cx}+k$، اگر $(x_۱,y_۱)$، $(x_۲,y_۲)$ و $(x_۳,y_۳)$ سه نقطه روی نمودار تابع باشند، آن‌گاه:
>
> $$x_۳=\frac{x_۱+x_۲}{۲} \implies (y_۳-k)^۲=(y_۱-k)(y_۲-k)$$
>
> یعنی $y_۳-k$ میانگین هندسی $y_۱-k$ و $y_۲-k$ است، اگر $x_۳$ میانگین حسابی $x_۱$ و $x_۲$ باشد.

پاسخ ۱۲

> این یک مقایسه‌ی زیباست، که باعث می‌شود بیشتر لذت ببرید! درک آن هم خیلی ساده است.
>
> | x | $x_۱$ | $x_۳$ | $x_۲$ |
> |---|---|---|---|
> | $f(x)$ | $y_۱$ | $y_۳$ | $y_۲$ |
>
> $x_۳=\frac{x_۱+x_۲}{۲}$
>
> خطی $f \implies y_۳=\frac{y_۱+y_۲}{۲}$
>
> نمایی $f \implies y_۳=\sqrt{y_۱y_۲}$
>
> یعنی در تابع **خطی**، از این‌که طول یک نقطه میانگین حسابی طول دو نقطه‌ی دیگر باشد، نتیجه می‌شود عرض آن نقطه هم میانگین **حسابی** عرض دو نقطه‌ی دیگر است. اما در تابع **نمایی**، از این‌که طول یک نقطه میانگین حسابی طول دو نقطه‌ی دیگر باشد، نتیجه می‌شود عرض آن نقطه میانگین **هندسی** عرض دو نقطه‌ی دیگر است. البته توابع نمایی به فرم $y=ab^{cx}$ مدنظر است.

الف باید داشته باشیم: $a=\frac{۵+۱۰}{۲}=\frac{۱۵}{۲}$, $۱۰=\frac{a+b}{۲}=\frac{\frac{۱۵}{۲}+b}{۲} \implies b=۲۰-\frac{۱۵}{۲}=\frac{۲۵}{۲}$

ب باید داشته باشیم: $a^۲=۵\times۱۰ \xrightarrow{۰<a} a=\sqrt{۵۰}=\sqrt{۲۵\times۲}=۵\sqrt{۲}$, $۱۰^۲=ab=۵\sqrt{۲}b \implies b=\frac{۱۰۰}{۵\sqrt{۲}}=\frac{۲۰}{\sqrt{۲}}=\frac{۲۰\sqrt{۲}}{۲}=۱۰\sqrt{۲}$

چرا گفتیم $a>۰$؟ چون تابع نمایی نمی‌تواند نوسان کند و از ۵ برود به $-\sqrt{۵۰}$ و دوباره به ۱۰. شوخی که نیست!

پاسخ ۱۳

$x=۴$ میانگین حسابی $x=۱$ و $x=۷$ است، اما $y=۶$ میانگین هندسی $y=۴$ و $y=۱۲$ نیست: $۴=\frac{۱+۷}{۲}$, $۶\neq\sqrt{۴\times۱۲}$

این یک‌کمی مشکوک است! چون در توابع نمایی به فرم $y=ab^{cx}$ این بازی‌ها را نداریم! پس حتماً تابع نمایی به موازات محور yها انتقال داشته، یعنی به فرم $y=ab^{cx}+k$ بوده. در این صورت یک kی ثابت باید باشد که هر $y-k$ میانگین هندسی دو $y-k$ کناری‌اش باشد.

$$۶-k=\sqrt{(۴-k)(۱۲-k)} \implies (۶-k)^۲=(۴-k)(۱۲-k) \implies ۳۶+k^۲-۱۲k=۴۸-۱۶k+k^۲ \implies ۴k=۱۲ \implies k=۳$$

پس:

$$(m-۳)^۲=(۱۲-۳)(۲۲۸-۳) \implies m-۳=\pm۴۵ \xrightarrow{۰<m-۳} m-۳=۴۵ \implies m=۴۸$$

(حواستان باشد که چون yها در حال زیادشدن بودند، m نتوانست منفی شود.)

پاسخ ۱۴

منظورش این است:

$$۲^{۳^{۲a}}\cdot۳^{۲^{۳b}}+۲^{۳^{۲a}+۳}\cdot۳^{۲^{۳b}+۲}=۱۷۵۲ \implies ۲^{۳^{۲a}}\cdot۳^{۲^{۳b}}\underbrace{(۱+۲^۳\times۳^۲)}_{۷۳}=\underbrace{۲۴\times۷۳}_{۱۷۵۲} \implies ۲^{۳^{۲a}}\cdot۳^{۲^{۳b}}=۲۴=۲^۳\times۳^۱$$

$$\implies ۲^{۳^{۲a}}=۲^۳ \ , \ ۳^{۲^{۳b}}=۳^۱ \implies ۳^{۲a}=۳ \ , \ ۲^{۳b}=۱ \implies ۲a=۱ \ , \ ۳b=۰ \implies a=\frac{۱}{۲} \ , \ b=۰ \implies a+b=\frac{۱}{۲}$$

پاسخ ۱۵

باید ببینیم معادله‌ی $(x^{-۳}-۱)^{x^۲+|x|-۲}=۱$ چند جواب دارد.

همیشه این را برای خودتان تکرار کنید:
از $a^b=۱$ نتیجه می‌شود $a=۱$ یا $b=۰$. (وقتی $b=۰$، a باید مخالف صفر باشد.)

$$(x^{-۳}-۱)^{x^۲+|x|-۲}=۱ \Longrightarrow x^{-۳}-۱=۱ \text{ یا } x^۲+|x|-۲=۰$$

$$x^{-۳}-۱=۱ \Longrightarrow \frac{۱}{x^۳}=۲ \Longrightarrow x^۳=\frac{۱}{۲} \Longrightarrow x=\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}}=\frac{\sqrt[۳]{۴}}{۲}$$

$$x^۲+|x|-۲=۰ \Longrightarrow |x|^۲+|x|-۲=۰ \Longrightarrow (|x|-۱)(|x|+۲)=۰$$

$|x|+۲$ که هیچ‌وقت صفر نمی‌شود، پس:

$$|x|-۱=۰ \Longrightarrow |x|=۱ \Longrightarrow x=\pm۱$$

اما گفتیم وقتی توان صفر می‌شود، پایه نباید صفر شود. $x=۱$، $x^{-۳}-۱$ را صفر می‌کند، پس قبول نیست. یعنی $x=\frac{\sqrt[۳]{۴}}{۲}$ یا $x=-۱$. پس جواب مسئله ۲ است.

پاسخ ۱۶

می‌خواهیم ببینیم معادله‌ی $(x^۲-x-۱)^{x^۲-x-۱}=۱$ چند جواب دارد. کلاً از $a^b=۱$ نتیجه می‌شود $a=۱$ یا $b=۰$ (وقتی $b=۰$، a باید مخالف صفر باشد). بنابراین از $a^a=۱$ نتیجه می‌شود $a=۱$؛ یعنی در این حالت، دیگر $a=۰$ اتفاق نمی‌افتد، چون $۰^۰$ تعریف‌نشده است.

$$(x^۲-x-۱)^{x^۲-x-۱}=۱ \Longrightarrow x^۲-x-۱=۱ \Longrightarrow x^۲-x-۲=۰ \Longrightarrow (x+۱)(x-۲)=۰ \Longrightarrow x=-۱ \text{ یا } x=۲$$