دوره‌ی تناوب

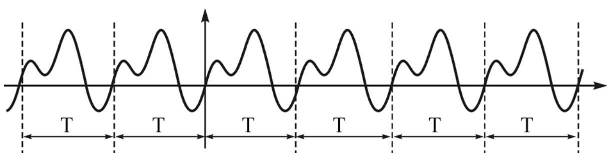
دو جور می‌شود راجع به دوره‌ی تناوب بحث کرد. یکی علمی و دیگری تستی و امتحانی و با زرنگ‌بازی. شما را نمی‌دانم، ولی من خودم در هرجا که امکان داشته باشد، همیشه طرفدار الگوی دوم بوده‌ام. این امکان در دوره‌ی تناوب بیش از هر بخش دیگری فراهم است. پس من شخصاً دوره‌ی تناوب را دوست دارم. شما هم می‌توانید نتیجه بگیرید من آدم بپیچونی هستم. من هم مخالفتی با این نظریه ندارم.

در پیداکردن دوره‌ی تناوب ما سعی می‌کنیم بیش از دیگر تست‌ها از گزینه‌ها استفاده کنیم. حتی اگر گزینه‌ها هم طوری باشد که این امکان را به ما ندهد، سعی می‌کنیم با امتحان‌کردن چند عدد که حدس‌زدنش خیلی ساده است، مسئله را حل کنیم. خلاصه این‌که معمولاً سعی می‌کنیم از راه حل رسمی و ریاضی‌وار پرهیز کنیم و تا جایی که امکان دارد، لایی بکشیم.

تعریف دوره‌ی تناوب

● به هر حرکتی که رفت و برگشت داشته باشد و بعد از هر رفت و برگشت مجدداً حرکت رفت و برگشت قبلی که انجام داده را دوباره عیناً تکرار کند، حرکت تناوبی گویند. مانند حرکت پیستون ماشین، حرکت پاندول یک ساعت، حرکت زمین به دور خورشید و یا حرکت یک چرخ و فلکی که نمی‌ایستد.

● از نظر نموداری تابعی که متناوب باشد، شکل یک بازه از آن همواره در قبل و بعد از خودش تکرار می‌شود.

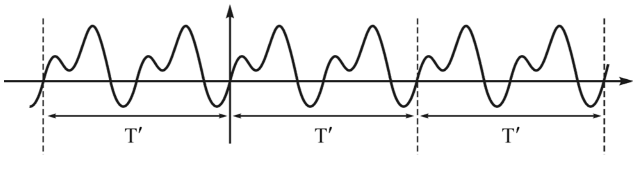


به طول T یک دوره‌ی تناوب می‌گویند.

● **تعریف ریاضی یک تابع متناوب:** تابع $f(x)$ را متناوب گویند اگر بتوان پارامتر T را برای آن به گونه‌ای یافت که رابطه‌ی $f(x+T)=f(x)$ **به ازای هر** $x\in D_f$ برقرار باشد.

● به کوچک‌ترین عدد مثبت T که در این رابطه صدق کند، دوره‌ی تناوب اصلی تابع می‌گویند.

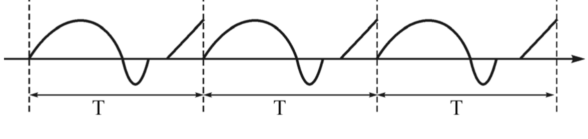
● اگر T یک دوره‌ی تناوب از تابعی باشد، آن‌گاه هر مضرب صحیحی از T نیز دوره‌ی تناوبی برای آن تابع خواهد بود. یعنی $f(x+T)=f(x) \Longrightarrow f(x+nT)=f(x)$، که در آن n عدد صحیحی است. مثلاً در همان شکل قبلی می‌توانید فرض کنید که تابع این‌گونه تکرار می‌شود.



البته همان‌طور که می‌بینید T' نیز یک دوره‌ی تناوب برای تابع است. ولی کوچک‌ترین دوره‌ی تناوب برای تابع نیست و داریم: $T'=2T$

● اگر تابعی متناوب باشد، آن‌گاه دامنه‌اش نمی‌تواند از سمت مثبت بی‌نهایت یا منفی بی‌نهایت محدودیت داشته باشد. زیرا قرار است اگر یک دوره از تابع را انتخاب کنیم، در قبل و بعدش هم همین نمودار عیناً وجود داشته باشد و همین‌طور برای بعدی‌ها و بعدی‌هایش و از آن طرف هم برای قبلی‌ها و قبلی‌هایش.

● اشتباه نکنید! منظور از نکته‌ی بالایی این نیست که دامنه‌ی هر تابع متناوب لزوماً $\mathbb{R}$ است. مثلاً به این شکل نگاه کنید:

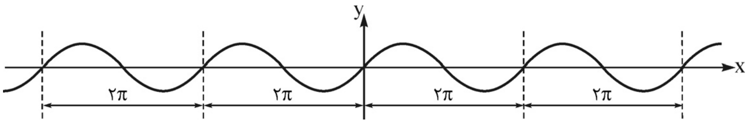


چنان‌چه می‌بینید دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}$ نیست و تابع به ازای نقاط خاصی از $\mathbb{R}$ تعریف نشده است، اما متناوب است. زیرا به ازای هر $x\in D_f$ داریم:

$$f(x+T)=f(x)$$

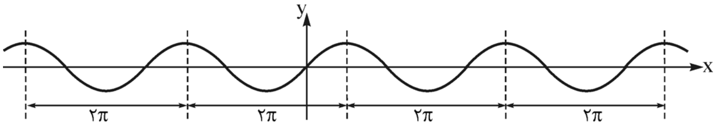
توابع متناوب معروف

دوره‌ی تناوب اصلی تابع $y=\sin ax$ را پیدا کنید.



راه اول: از روی شکل تابع $y=\sin x$ واضح است که کوچک‌ترین بازه‌ای که می‌توان در نظر گرفت که تابع قبل و بعد از آن عیناً تکرار می‌شود، بازه‌ای به طول ۲π است. بنابراین $T=۲\pi$.

البته می‌توانید این دوره‌ها را این‌گونه نیز انتخاب کنید:



راه دوم: (راه حل جبری) می‌خواهیم کوچک‌ترین مقدار مثبت T را از این معادله پیدا کنیم:

$$\sin a(x+T)=\sin ax \Longrightarrow \begin{cases} ax+aT=۲k\pi+ax \\ ax+aT=۲(k+۱)\pi-ax \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} aT=۲k\pi \Longrightarrow T=\dfrac{۲k\pi}{a} \\ aT=۲(k+۱)\pi-۲ax \end{cases}$$

مقدار ثابت و مستقلی از x برای k نمی‌دهد.

از معادله‌ی اول داریم که کوچک‌ترین مقدار مثبت T، با فرض مثبت‌بودن a، از $k=۱$ پیدا می‌شود. پس برای همیشه مثبت‌بودن T، داریم: $T=\dfrac{۲\pi}{|a|}$

- به همین ترتیب برای بقیه‌ی نسبت‌های مثلثاتی نیز می‌توانید به سادگی دوره‌ی تناوب اصلی را به دست آورید:

$$\sin ax \longrightarrow T=\frac{۲\pi}{|a|} \qquad \cos ax \longrightarrow T=\frac{۲\pi}{|a|} \qquad \tan ax \longrightarrow T=\frac{\pi}{|a|} \qquad \cot ax \longrightarrow T=\frac{\pi}{|a|}$$

- اگر T_f دوره‌ی تناوب تابع f و T_g دوره‌ی تناوب تابع g باشد، آن‌گاه ک.م.م T_f و T_g یک دوره‌ی تناوب برای توابع $f+g$، $f-g$، $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ است، اما لزوماً کوچک‌ترین دوره‌ی تناوب این توابع نیست.
- در بحث بالا شرط این‌که توابع $f+g$، $f-g$، $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ متناوب باشند، این است که $\frac{T_f}{T_g}$ مقداری گویا باشد نه گنگ.
- یک راه ساده برای پیداکردن ک.م.م چند عبارت کسری این است:

$$\frac{\text{ک.م.م صورت‌ها}}{\text{ب.م.م مخرج‌ها}}$$

- با تصورکردن نمودار یک تابع متناوب، می‌توان فهمید انتقال و یا ضرب‌شدن ضریب در عرض‌های آن، طول دوره‌ی تناوب تابع را عوض نمی‌کند. یعنی اگر دوره‌ی تناوب تابع $f(x)$ برابر T باشد. دوره‌ی تناوب تابع $af(x+b)$ نیز T خواهد بود.

برای هر یک از توابع زیر، یک دوره‌ی تناوب (و نه لزوماً کوچک‌ترین دوره‌ی تناوب) را، در صورت وجود پیدا کنید.

۱) $y=\sin x+\cos ۲x+\tan ۳x+\cot ۴x$

۲) $y=\sin ۷x\cos ۹x+۲$

۳) $y=\sin ۲x+\cos\sqrt{۲}(x+۱)$

۴) $y=\cos\pi x+\tan x$

۵) $y=\pi\cot\pi x+\sqrt{۲}\cos(\frac{\pi x}{۳}-\frac{\pi}{۵})$

وقتی فرمول حاضر و آماده وجود دارد، سراغ حل‌کردن، از راه‌های جبری نمی‌رویم.

۱

$$\begin{aligned} &\sin x \longrightarrow T_۱=\frac{۲\pi}{۱}=۲\pi \\ &\cos ۲x \longrightarrow T_۲=\frac{۲\pi}{۲}=\pi \\ &\tan ۳x \longrightarrow T_۳=\frac{\pi}{۳} \\ &\cot ۴x \longrightarrow T_۴=\frac{\pi}{۴} \end{aligned} \Longrightarrow T=[T_۱,T_۲,T_۳,T_۴]=[۲\pi,\pi,\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۴}]=\pi\ [۲,۱,\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴}]=\pi\times\frac{[۲,۱,۱,۱]}{(۱,۱,۳,۴)}=\pi\times\frac{۲}{۱}=۲\pi$$

۲ راه اول:

$$y=\sin ۷x\cos ۹x+۲=\frac{۱}{۲}(\sin ۱۶x+\sin(-۲x))+۲=\frac{۱}{۲}(\sin ۱۶x-\sin ۲x)+۲$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin ۱۶x \longrightarrow T_۱ = \frac{۲\pi}{۱۶} = \frac{\pi}{۸} \\ \sin ۲x \longrightarrow T_۲ = \frac{۲\pi}{۲} = \pi\end{array}\right\} \Longrightarrow T = [T_۱ , T_۲] = [\frac{\pi}{۸} , \pi] = \pi$$

راه دوم:

$$\left.\begin{array}{l}\sin ۷x \longrightarrow T_۱ = \frac{۲\pi}{۷} \\ \cos ۹x \longrightarrow T_۲ = \frac{۲\pi}{۹}\end{array}\right\} \Longrightarrow T = [T_۱ , T_۲] = \pi\ [\frac{۲}{۷} , \frac{۲}{۹}] = \frac{۲}{۱} \times \pi = ۲\pi$$

۳

$$\sin ۲x \longrightarrow T_۱ = \frac{۲\pi}{|۲|} = \pi \quad , \quad \cos(\sqrt{۲}x + \sqrt{۲}) \longrightarrow T_۲ = \frac{۲\pi}{|\sqrt{۲}|} = \sqrt{۲}\pi$$

از آن‌جا که $\frac{T_۲}{T_۱} = \sqrt{۲}$ و $\sqrt{۲}$ عددی گویا نیست. بنابراین مجموع این دو تابع، متناوب نیست.

۴

$$\cos \pi x \longrightarrow T_۱ = \frac{۲\pi}{|\pi|} = ۲$$

$$\tan x \longrightarrow T_۲ = \pi$$

باز هم چون حاصل تقسیم دو دوره‌ی تناوب به دست آمده عددی گویا نیست (زیرا $\frac{\pi}{۲}$ عددی گنگ است)، بنابراین تابع متناوب نیست.

۵

$$\left.\begin{array}{l}\pi \cot \pi x \longrightarrow T_۱ = \frac{\pi}{|\pi|} = ۱ \\ \sqrt{۲}\cos(\frac{\pi x}{۳} - \frac{\pi}{۵}) \longrightarrow T_۲ = \frac{۲\pi}{|\frac{\pi}{۳}|} = ۶\end{array}\right\} \Longrightarrow T = [T_۱ , T_۲] = [۱ , ۶] = ۶$$

اگر دوره‌ی تناوب بخشی از تابع، ضریبی از π یا هر عدد گنگ دیگری (مانند $\sqrt{۲} , \sqrt{۳} , \cdots$) باشد و دوره‌ی تناوب بخش دیگری از تابع، عدد گویا باشد، این تابع در کل نمی‌تواند متناوب باشد. (مانند قسمت‌های ۳ و ۴ همین مثال) اما اگر دوره‌ی تناوب هر دو بخش تابع گنگ باشد، تابع می‌تواند متناوب باشد. مانند قسمت ۱ و ۲ همین مثال.

متناوب بودن تابع $y = \sin x^n$ را بررسی کنید.

$$f(x+T) = f(x) \Longrightarrow \sin(x+T)^n = \sin x^n \Longrightarrow \begin{cases}(x+T)^n = ۲k\pi + x^n \\ (x+T)^n = ۲(k+۱)\pi - x^n\end{cases}$$

واضح است که در حالت $n \neq ۱$ از هیچ‌یک از این معادله‌ها مقداری ثابت و مستقل از x برای T به دست نخواهد داد.

بنابراین این تابع، متناوب نیست. همین کار را به راحتی می‌توانید برای توابع $y = \cos x^n$ ، $y = \tan x^n$ و $y = \cot x^n$ بکنید و نتیجه‌ی زیر را بگیرید.

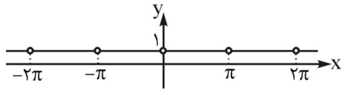
اگر x در کمان یک تابع مثلثاتی، توانی به جز ۱ داشته باشد، تابع متناوب نیست.

- تابع ثابت $y = C$ تابعی متناوب است، اما کوچک‌ترین دوره‌ی تناوب ندارد. زیرا هر عددی که به عنوان T برای آن انتخاب کنید، در رابطه‌ی $f(x+T) = f(x)$ صدق می‌کند.

تابع $y = \frac{\sin x}{\sin x}$ از لحاظ متناوب‌بودن چگونه است؟

۱) متناوب است، اما کوچک‌ترین دوره‌ی تناوب ندارد.
۲) متناوب است و کوچک‌ترین دوره‌ی تناوب آن $\frac{\pi}{۲}$ است.
۳) متناوب نیست.
۴) متناوب است و کوچک‌ترین دوره‌ی تناوب آن π است.

این تابع همان تابع ثابت $y = ۱$ است، مگر در نقاطی که $x = k\pi$ باشد. زیرا این نقاط در دامنه‌ی تابع نیستند. چنان‌چه می‌بینید دوره‌ی تناوب این تابع $T = \pi$ است.



دوره‌ی تناوب توابع براکتی

پیداکردن این دوره‌های تناوب معمولاً وابسته به شرطی است که شما برای خارج‌کردن عبارت دارای T از براکت می‌گذارید. اگر یادتان باشد در خواص براکت گفتیم که تساوی $[x+a]=[x]+a$ وقتی برقرار است که a عددی صحیح باشد.

توضیح گیجتان می‌کند. برویم سراغ مثال که گویاتر از هر توضیحی است.

دوره‌ی تناوب تابع $y=ax-[ax]$ را بیابید.

$$f(x+T)=f(x) \Rightarrow a(x+T)-[a(x+T)]=ax-[ax] \Rightarrow ax+aT-[ax+aT]=ax-[ax]$$

$$\Rightarrow aT-[ax+aT]=-[ax]$$

شرط این‌که دو طرف برابر شوند، این است که مقدار aT بتواند از داخل براکت خارج شود و شرط این‌که عددی بتواند از داخل براکت خارج شود، این است که مقدارش صحیح باشد. پس aT می‌تواند مقادیر ... یا ۲ یا ۱ یا ۰ یا ۱− یا ۲− یا ... را داشته باشد. اما چون به دنبال دوره‌ی تناوب اصلی هستید، پس باید کوچک‌ترین عدد مثبت ممکن را انتخاب کنید. یعنی: $aT=۱ \Rightarrow T=\frac{۱}{a}$

و چون مقدار دوره‌ی تناوب را همیشه مثبت در نظر می‌گیریم. می‌توان نتیجه‌ی زیر را گرفت:

دوره‌ی تناوب اصلی تابع $y=ax-[ax]$ به صورت $T=\frac{۱}{|a|}$ است.

دوره‌ی تناوب توابع زیر را بیابید.

۱) $y=۳[\frac{x}{۳}]-x$ ۲) $y=۶[\frac{x}{۶}]-۸[\frac{x}{۸}]$ ۳) $y=۱۵x-[۹x]-[۶x]$

در این مثال از نتیجه‌گیری مثال قبلی استفاده می‌کنیم:

۱ $y=۳([\frac{x}{۳}]-\frac{x}{۳}) \longrightarrow T=\frac{۱}{\frac{۱}{۳}}=۳$

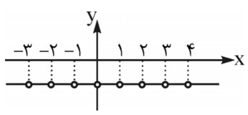
۲ یک x به ضابطه‌ی تابع اضافه کرده و یکی کم می‌کنیم: $y=۶[\frac{x}{۶}]-x+x-۸[\frac{x}{۸}]=۶([\frac{x}{۶}]-\frac{x}{۶})+۸(\frac{x}{۸}-[\frac{x}{۸}])$

دوره‌ی تناوب پرانتز اول $T_۱=\frac{۱}{\frac{۱}{۶}}=۶$ و پرانتز دوم $T_۲=\frac{۱}{\frac{۱}{۸}}=۸$ است. $T=[T_۱,T_۲]=[۶,۸]=۲۴ \Rightarrow T=۲۴$

۳ $۱۵x$ را به صورت $۹x+۶x$ می‌شکنیم: $y=(۹x-[۹x])+(۶x-[۶x]) \longrightarrow T_۱=\frac{۱}{۹}\ ,\ T_۲=\frac{۱}{۶} \Rightarrow [\frac{۱}{۶},\frac{۱}{۹}]=\frac{\text{ک.م.م صورت‌ها}}{\text{ب.م.م مخرج‌ها}}=\frac{۱}{۳}$

دوره‌ی تناوب اصلی تابع $y=[ax]+[-ax]$ را بیابید.

راه اول: شما شکل تابع $f(x)=[x]+[-x]$ را بلد هستید و می‌بینید که برای آن داریم $T=۱$.



از طرفی با توجه به قواعد ترسیم می‌دانید که $f(ax)=[ax]+[-ax]$ فقط در جهت محور x ها، a برابر فشرده می‌شود. بنابراین می‌توان فهمید که: $T=\frac{۱}{|a|}$

راه دوم: $f(x+T)=f(x) \Rightarrow [a(x+T)]+[-a(x+T)]=[ax]+[-ax] \Rightarrow [ax+aT]+[-ax-aT]=[ax]+[-ax]$

شرط برابرشدن دو طرف این است که aT از براکت خارج شود، پس $aT\in\mathbb{Z}$. از طرفی برای پیداکردن دوره‌ی تناوب اصلی داریم: $aT=۱$

با توجه به مثبت‌بودن دوره‌ی تناوب: $T=\frac{۱}{|a|}$

دوره‌ی تناوب تابع $y=(-۱)^{[ax+b]}$ را پیدا کنید.

$$f(x+T)=f(x) \Rightarrow (-1)^{[a(x+T)+b]}=(-1)^{[ax+b]} \Rightarrow (-1)^{[ax+b+aT]}=(-1)^{[ax+b]}$$

برای خارج‌شدن aT از براکت داریم $aT\in\mathbb{Z}$. با این فرض:

$$(-1)^{[ax+b]+aT}=(-1)^{[ax+b]} \Rightarrow (-1)^{[ax+b]}\times(-1)^{aT}=(-1)^{[ax+b]} \Rightarrow (-1)^{aT}=1$$

با توجه به معادله‌ی اخیر و توجه به $aT\in\mathbb{Z}$، به این نتیجه می‌رسیم که aT باید زوج باشد، ولی چون دوره‌ی تناوب اصلی را می‌خواهیم باید کوچک‌ترین مقدار مثبت زوج را برای aT در نظر بگیریم. یعنی: $aT=2 \Rightarrow T=\frac{2}{|a|}$

استفاده از تبدیل کمان در تشخیص دوره‌ی تناوب اصلی

تا به حال بیشتر از شما خواسته می‌شد که یک دوره‌ی تناوب برای تابع‌های داده‌شده، پیدا کنید و این T لزوماً کوچک‌ترین T مثبت ممکن نبود، بلکه ممکن بود، T های دیگری وجود داشته باشند که در رابطه‌ی $f(x+T)=f(x)$ صدق کنند و از آن T که شما به دست آورده‌اید، کوچک‌تر باشند.

حتماً یادتان هست که گفتیم برای توابع $f+g$، $f-g$، $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ مقدار $[T_f,T_g]$ یک دوره‌ی تناوب است، ولی لزوماً دوره‌ی تناوب اصلی نیست. خلاصه‌ی کلام این‌که شما تا الآن برای توابع فقط یک دوره از دوره‌های تناوب تابع را پیدا می‌کردید نه دوره‌ی تناوب اصلی آن را. اما معمولاً چیزی که برای ما مهم است، دوره‌ی تناوب اصلی تابع است. از این‌جا به بعد سعی داریم که با روش ساده‌ای، دوره‌ی تناوب اصلی تابع را پیدا کنیم.

برای پیداکردن دوره‌ی تناوب اصلی یک تابع، ابتدا یک دوره‌ی تناوب (که می‌تواند لزوماً دوره‌ی تناوب اصلی تابع نباشد) مانند T را حدس‌زده و یا به روش‌های معمول که در این فصل فرا گرفتید، پیدا می‌کنید، سپس نصف این دوره‌ی تناوب را به روشی که در زیر خواهد آمد امتحان می‌کنیم تا ببینیم که آیا آن هم دوره‌ی تناوب تابع، هست یا نیست. اگر نبود که یعنی دوره‌ی تناوب اصلی همان T بوده است، اما اگر $\frac{T}{2}$ هم دوره‌ی تناوب بود، مقدار $\frac{T}{4}$ را امتحان می‌کنیم و این روند نصف‌کردن را تا جایی ادامه می‌دهیم که مطمئن شویم دوره‌ی تناوب اصلی تابع را در مرحله‌ی قبل یافته‌ایم.

روش امتحان‌کردن این‌که آیا $\frac{T}{2}$ دوره‌ی تناوب تابع هست یا نیست:

مقدار x را به مقدار $x+\frac{T}{2}$ تبدیل می‌کنیم و در تابع، جایگذاری می‌کنیم. سپس با عملیات جبری، باید ببینیم که آیا رابطه‌ی $f(x+\frac{T}{2})=f(x)$ نیز برقرار است یا نه؟ اگر برقرار بود، آن‌گاه $\frac{T}{2}$ نیز دوره‌ی تناوب تابع است.

دوره‌ی تناوب اصلی توابع زیر را محاسبه کنید.

۱) $y=\cos(\sin ax)$ ۲) $y=\sin(\cos ax)$ ۳) $y=\sin(\cos^{-1}x)$ ۴) $y=\cos^{-1}(\sin x)$

۵) $y=\sin^{2n}ax$ ۶) $y=\cos^{2n+1}ax$ ۷) $y=\frac{2\sin x+3\cos x}{4\cos x+5\sin x}$ ۸) $y=\cot ax-\tan ax$

۹) $y=\sin^{2n}ax+\cos^{2n}ax$ ۱۰) $y=(-1)^{[\frac{x}{\pi}]}\cos x$

1 می‌دانید که: $\sin ax \Rightarrow T=\frac{2\pi}{|a|}$

پس مطمئن هستم با تبدیل $x\to x+\frac{2\pi}{a}$ تابع تغییری نمی‌کند. شما مطمئن نیستید؟ باشه بابا امتحان می‌کنیم:

$$\cos(\sin a(x+\frac{2\pi}{a}))=\cos(\sin(ax+2\pi)) \xrightarrow{\sin(\alpha+2\pi)=\sin\alpha} =\cos(\sin ax)$$

حالا نصف $\frac{2\pi}{a}$ را امتحان می‌کنیم یعنی $\frac{\pi}{a}$: $x\to x+\frac{\pi}{a}$

$$f(x+\frac{T}{2})=\cos(\sin a(x+\frac{\pi}{a}))=\cos(\sin(ax+\pi)) \xrightarrow{\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha} \cos(-\sin ax) \xrightarrow{\cos(-\alpha)=\cos\alpha} =\cos(\sin ax)=f(x)$$

پس $T=\frac{\pi}{|a|}$ هم دوره‌ی تناوب است. اکنون $\frac{\pi}{۲a}$ را امتحان می‌کنیم: $\cos(\sin a(x+\frac{\pi}{۲a}))=\cos(\sin(ax+\frac{\pi}{۲}))=\cos(\cos ax)\neq f(x)$

پس $\frac{\pi}{۲|a|}$ دوره‌ی تناوب نیست و دوره‌ی تناوب اصلی همان $T=\frac{\pi}{|a|}$ است.

۲ $T=\frac{۲\pi}{|a|}$ که حتماً یک دوره‌ی تناوب هست. حالا $T=\frac{\pi}{a}$ را امتحان می‌کنیم:

$$f(x+\frac{T}{۲})=\sin(\cos a(x+\frac{\pi}{a}))=\sin(-\cos ax)=-\sin(\cos ax)\neq f(x)$$

بنابراین دوره‌ی تناوب همان $T=\frac{۲\pi}{|a|}$ است.

۳ از آن‌جا که دامنه‌ی تابع $y=\sin(\cos^{-۱}x)$ بازه‌ی $[-۱,۱]$ است، بنابراین این تابع، اصلاً نمی‌تواند متناوب باشد. چون دامنه‌اش از دو طرف محدود است.

۴ $T=\frac{۲\pi}{|a|}$ یک دوره‌ی تناوب است. زیرا با تبدیل $x\to x+\frac{۲\pi}{a}$ تابع تغییری نمی‌کند.

$$f(x+\frac{T}{۲})=f(x+\frac{\pi}{a})=\cos^{-۱}\sin a(x+\frac{\pi}{a})=\cos^{-۱}(-\sin ax)\neq f(x)$$

بنابراین همان $T=\frac{۲\pi}{|a|}$ بوده است.

- تمرین‌های ۱ تا ۴ در این مثال به بررسی وضعیت تناوب توابع $fog(x)$ می‌پردازد. با توجه به حل این مثال‌ها نتیجه‌گیری زیر از این ۴ تمرین قابل انجام است:

در پیداکردن دوره‌ی تناوب اصلی توابع fog نکات زیر قابل ذکر است:

۱ اگر تابع g متناوب نباشد، تابع fog نیز متناوب نخواهد بود.

۲ به عنوان یک حدس آغازی برای پیداکردن دوره‌ی تناوب اصلی تابع fog (با همان روش امتحان‌کردن نصف دوره‌ی تناوب) می‌توان از T_g یعنی دوره‌ی تناوب تابع g شروع کرد و بعد $\frac{T_g}{۲}$ را در تابع fog امتحان کرد.

۵ قطعاً $T=\frac{۲\pi}{a}$ یک دوره‌ی تناوب برای تابع $y=\sin^{۲n}ax$ هست. اکنون $T=\frac{\pi}{a}$ را امتحان می‌کنیم:

$$f(x+\frac{\pi}{a})=\sin^{۲n}a(x+\frac{\pi}{a})=(\sin(ax+\pi))^{۲n}=(-\sin(ax))^{۲n}\xrightarrow{\text{توابع زوج}}(\sin(ax))^{۲n}=f(x)$$

پس $T=\frac{\pi}{|a|}$ هم دوره‌ی تناوب است. پس $T=\frac{\pi}{۲a}$ را امتحان می‌کنیم:

$$f(x+\frac{\pi}{۲a})=\sin^{۲n}(a(x+\frac{\pi}{۲a}))=(\sin(ax+\frac{\pi}{۲}))^{۲n}=(\cos ax)^{۲n}\neq f(x)$$

پس دوره‌ی تناوب اصلی همان $T=\frac{\pi}{|a|}$ است.

۶ $T=\frac{۲\pi}{a}$ قطعاً دوره‌ی تناوب است، پس $\frac{\pi}{a}$ را امتحان می‌کنیم:

$$f(x+\frac{\pi}{a})=\cos^{۲n+۱}a(x+\frac{\pi}{a})=(\cos(ax+\pi))^{۲n+۱}=(-\cos ax)^{۲n+۱}\xrightarrow{\text{توابع فرد}}=-(\cos ax)^{۲n+۱}\neq f(x)$$

پس دوره‌ی تناوب همان $\pi=\frac{۲\pi}{a}$ است.

- مشابه تمرین‌های ۵ و ۶ می‌توان برای توان‌های زوج و فرد بقیه‌ی نسبت‌های مثلثاتی هم تحقیق کنید و به نتایج زیر برسید:

۱ دوره‌ی تناوب اصلی توابع $y=\sin^{۲n}ax$ ، $y=\cos^{۲n}ax$ ، $y=\tan^{n}ax$ و $y=\cot^{n}ax$ به صورت $T=\frac{\pi}{|a|}$ است.

۲ دوره‌ی تناوب اصلی توابع $y=\sin^{۲n+۱}ax$ و $y=\cos^{۲n+۱}ax$ به صورت $T=\frac{۲\pi}{|a|}$ است.

۷ صورت و مخرج را بر $\cos x$ تقسیم می‌کنیم:

$$y=\frac{\frac{۲\sin x}{\cos x}+۳\frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{۴\cos x}{\cos x}+۵\frac{\sin x}{\cos x}}=\frac{۲\tan x+۳}{۴+۵\tan x}$$

واضح است که با تبدیل $x\to x+\pi$ تابع تغییری نمی‌کند و با تبدیل $x\to x+\frac{\pi}{۲}$ تابع به $y=\frac{-۲\cot x+۳}{۴-۵\cot x}$ تبدیل می‌شود. بنابراین دوره‌ی تناوب همان $T=\pi$ است.

۸ راه اول: $\cot ax-\tan ax=\frac{\cos ax}{\sin ax}-\frac{\sin ax}{\cos ax}=\frac{\cos^2 ax-\sin^2 ax}{\sin ax\cos ax}=\frac{\cos 2ax}{\frac{1}{2}\sin 2ax}=2\cot 2ax \Longrightarrow T=\frac{\pi}{|2a|}$

راه دوم: $\frac{\pi}{a}$ قطعاً یک دوره‌ی تناوب برای هر یک از توابع $\tan ax$ و $\cot ax$ است.

پس یک دوره‌ی تناوب برای $y=\cot ax-\tan ax$ نیز هست. بنابراین ما نصف آن را امتحان می‌کنیم:

$$f(x+\frac{\pi}{2a})=\cot a(x+\frac{\pi}{2a})-\tan a(x+\frac{\pi}{2a})=\cot(ax+\frac{\pi}{2})-\tan(ax+\frac{\pi}{2})\xrightarrow[\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha]{\cot(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha}=-\tan ax+\cot ax=f(x)$$

اکنون باید $\frac{\pi}{4a}$ را امتحان می‌کنیم، این کار را خودتان بکنید. خواهید دید که به تـابع $y=\cot ax-\tan ax$ نخواهیـد رسـید. پـس دوره‌ی تنـاوب اصـلی همـان $T=\frac{\pi}{|2a|}$ است.

۹ می‌دانیم که $\frac{\pi}{a}$ دوره‌ی تناوب $\sin^{2n}ax$ و $\cos^{2n}ax$ هست، پس ما $\frac{\pi}{2a}$ را برای کل تابع امتحان می‌کنیم:

$$f(x+\frac{\pi}{2a})=\sin^{2n}a(x+\frac{\pi}{2a})+\cos^{2n}a(x+\frac{\pi}{2a})=\sin^{2n}(ax+\frac{\pi}{2})+\cos^{2n}(ax+\frac{\pi}{2})=(\cos ax)^{2n}+(-\sin ax)^{2n}$$
$$=\cos^{2n}ax+\sin^{2n}ax=f(x)$$

پس $T=\frac{\pi}{2a}$ یک دوره‌ی تناوب برای کل تابع است.

اکنون $T=\frac{\pi}{4a}$ را جایگذاری می‌کنیم: $\sin^{2n}a(x+\frac{\pi}{4a})+\cos^{2n}a(x+\frac{\pi}{4a})=\sin^{2n}(ax+\frac{\pi}{4})+\cos^{2n}(ax+\frac{\pi}{4})$

واضح است که برابر $f(x)$ نیست. پس دوره‌ی تناوب اصلی همان $T=\frac{\pi}{|2a|}$ است.

۱۰ دوره‌ی تناوب اصلی $y=\cos x$ و $y=(-1)^{[\frac{x}{\pi}]}$ هر دو $T=2\pi$ است. بنابراین $T=2\pi$ یک دوره‌ی تناوب برای حاصل‌ضرب آن‌ها هم خواهد بود. اکنـون ما نصف $T=2\pi$ (یعنی $T=\pi$) را انتخاب می‌کنیم:

$$f(x+\pi)=(-1)^{[\frac{x+\pi}{\pi}]}\times\cos(x+\pi)=(-1)^{[\frac{x}{\pi}]+1}(-\cos x)=-(-1)\times(-1)^{[\frac{x}{\pi}]}\times\cos x=(-1)^{[\frac{x}{\pi}]}\times\cos x=f(x)$$

پس $T=\pi$ یک دوره‌ی تناوب برای تابع کل است. اکنون باید $T=\frac{\pi}{2}$ را نیز امتحان کنیم: $f(x+\frac{\pi}{2})=(-1)^{[\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}]}\cos(x+\frac{\pi}{2})=(-1)^{[\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}]}\times(-\sin x)$

واضح است که این تابع نمی‌تواند مساوی $f(x)$ باشد. پس دوره‌ی تناوب همان $T=\pi$ خواهد بود.

تمرین‌های ۸ ، ۹ و ۱۰ از این مثال نمونه‌های خوبی هستند تـا بـه شـما ثابـت کننـد کـه ک.م.م دوره‌هـای تنـاوب توابـع $f+g$ ، $f-g$ ، $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ درست است که یک دوره‌ی تناوب برای تابع است، اما لزوماً دوره‌ی تناوب اصلی این توابع نیست.

دوره‌ی تناوب اصلی توابع زیر را به دست آورید.

۱) $y=|\sin ax|$ ۲) $y=|\cot ax|$ ۳) $y=|\sin ax+\cos ax|$

۴) $y=|\tan ax-\cot ax|$ ۵) $y=|\sin ax|+|\cos ax|$ ۶) $y=|\tan ax|+|\cot ax|$

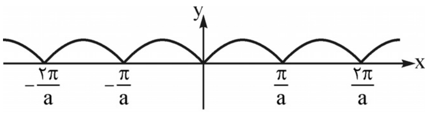
این تمرین نیز دقیقاً مانند تمرین قبلی حل می‌شود و علت این‌که آن را جدا کردیم فقط این است که مسائل مربوط به قدرمطلق را در یک تمرین جداگانه آورده باشیم.

۱ راه اول: $T=\frac{2\pi}{a}$ یک دوره‌ی تناوب است. اکنون $T=\frac{\pi}{a}$ را امتحان می‌کنیم:

$$f(x+\frac{\pi}{a})=|\sin a(x+\frac{\pi}{a})|=|\sin(ax+\pi)|=|-\sin ax|=|\sin ax|=f(x)$$

پس $T=\frac{\pi}{|a|}$ نیز دوره‌ی تناوب است. با امتحان‌کردن $T=\frac{\pi}{|2a|}$ به $f(x+\frac{\pi}{2a})=|\cos ax|$ خواهید رسـید کـه مخـالف $f(x)$ اسـت. پـس $T=\frac{\pi}{|a|}$ دوره‌ی تناوب اصلی تابع می‌باشد.

راه دوم: رسم $y=|\sin ax|$:



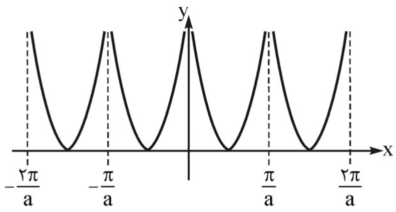
بنابراین داریم: $T=\frac{\pi}{|a|}$

۲ راه اول: $T=\frac{\pi}{|a|}$ یک دوره‌ی تناوب است. شما اگر $\frac{\pi}{۲a}$ را امتحان کنید، به این می‌رسید:

$$f(x+\frac{\pi}{۲a})=|\cot a(x+\frac{\pi}{۲a})|=|\cot(ax+\frac{\pi}{۲})|=|-\tan(ax)|\neq f(x)$$

پس $T=\frac{\pi}{|a|}$ دوره‌ی تناوب اصلی است.

راه دوم: رسم $|\cot ax|$:



$$\Longrightarrow T=\frac{\pi}{|a|}$$

با ادامه‌ی راه حل‌های مشابه برای توابع $|y=|\cos ax$ و $|y=|\tan ax$ به نتایج زیر می‌رسیم:

دوره‌ی تناوب اصلی توابع $|y=|\sin ax$ ، $|y=|\cos ax$ ، $|y=|\tan ax$ **و** $|y=|\cot ax$ **به صورت** $T=\frac{\pi}{|a|}$ **است.**

۳ $T=\frac{۲\pi}{|a|}$ قطعاً یک دوره‌ی تناوب برای $\sin ax+\cos ax$ است. بنابراین ما نصفش را برای $|\sin ax+\cos ax|$ امتحان می‌کنیم:

$$f(x+\frac{\pi}{a})=|\sin a(x+\frac{\pi}{a})+\cos a(x+\frac{\pi}{a})|=|\sin(ax+\pi)+\cos(ax+\pi)|=|-\sin ax-\cos ax|=|\sin ax+\cos ax|=f(x)$$

پس مجبوریم $\frac{\pi}{۲a}$ را نیز امتحان کنیم:

$$f(x+\frac{\pi}{۲a})=|\sin a(x+\frac{\pi}{۲a})+\cos a(x+\frac{\pi}{۲a})|=|\sin(ax+\frac{\pi}{۲})+\cos(ax+\frac{\pi}{۲})|=|\cos ax-\sin ax|\neq f(x)$$

پس دوره‌ی تناوب تابع همان $T=\frac{\pi}{|a|}$ است.

۴ $$|\tan ax-\cot ax|=|-\cot ۲ax|\Longrightarrow T=\frac{\pi}{|۲a|}$$

۵ $T=\frac{\pi}{a}$ قطعاً دوره‌ی تناوب است. پس $T=\frac{\pi}{۲a}$ را امتحان می‌کنیم:

$$f(x+\frac{\pi}{۲a})=|\sin a(x+\frac{\pi}{۲a})|+|\cos a(x+\frac{\pi}{۲a})|=|\sin(ax+\frac{\pi}{۲})|+|\cos(ax+\frac{\pi}{۲})|=|\cos ax|+|-\sin ax|=|\cos ax|+|\sin ax|=f(x)$$

پس $T=\frac{\pi}{۲a}$ نیز یک دوره‌ی تناوب است. با امتحان $T=\frac{\pi}{۴a}$ خواهید دید که دوره‌ی تناوب نیست. بنابراین دوره‌ی تناوب اصلی برابر است با : $T=\frac{\pi}{|۲a|}$

۶ $T=\frac{\pi}{|a|}$ دوره‌ی تناوب هر یک است. با امتحان نصف آن داریم:

$$f(x+\frac{\pi}{۲a})=|\tan a(x+\frac{\pi}{۲a})|+|\cot a(x+\frac{\pi}{۲a})|=|\tan(ax+\frac{\pi}{۲})|+|\cot(ax+\frac{\pi}{۲})|=|-\cot ax|+|-\tan ax|=|\tan ax|+|\cot ax|=f(x)$$

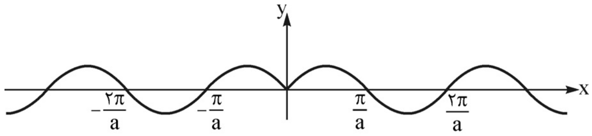
با امتحان $\frac{\pi}{۴a}$ خواهیم دید که جواب نیست. پس دوره‌ی تناوب اصلی $T=\frac{\pi}{|۲a|}$ می‌شود.

دوره‌ی تناوب اصلی توابع زیر را تعیین کنید.

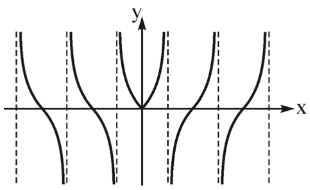
۱) $y=\sin|ax|$ ۲) $y=\cos|ax|$ ۳) $y=\tan|ax|$

۴) $y=\cot|ax|$ ۵) $y=|\tan|ax||$

راحت‌ترین راه این سؤال، این است که همه‌ی این توابع را رسم کنیم.

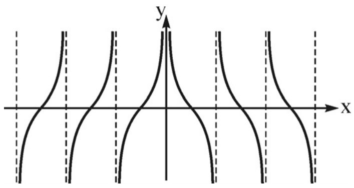


۱ همان‌طور که می‌بینید شکل همه جا تکرار می‌شود، اما در دو طرف محور y ها شکل از الگوی تکرارهای بعدی یا قبلی تبعیت نمی‌کند. بنابراین این تابع متناوب نیست.

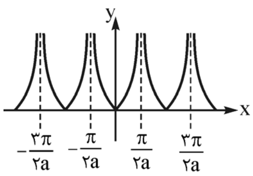


۲ چون داریم $\cos\alpha = \cos|\alpha|$، بنابراین $\cos|ax| = \cos ax$. پس دوره‌ی تناوب آن هم $\frac{2\pi}{|a|}$ است.

۳ تابع متناوب نیست.



۴ تابع متناوب نیست.



۵ تابع متناوب است و داریم $T = \frac{\pi}{|a|}$.

دوره‌ی تناوب اصلی توابع زیر را پیدا کنید.

۱) $\sin[x]$ ۲) $\sin\pi[x]$ ۳) $\sin[\pi x]$

۱ $f(x+T) = f(x) \Longrightarrow \sin[x+T] = \sin[x]$

باید عبارت سمت راست به صورت $\sin([x]+T) = \sin[x]$ در بیاید و T هم مساوی 2π یا 4π یا $\cdots$ یا به هر حال $2k\pi$ باشد. اما چنین چیـزی ممکـن نیـست. زیرا اگر مثلاً $T = 2\pi$ باشد، آن‌گاه مقدار T عدد صحیحی نبوده و نمی‌توانسته از داخل براکت خارج شود. پس این تابع متناوب نیست.

۲ $f(x+T) = f(x) \Longrightarrow \sin\pi[x+T] = \sin\pi[x]$

باید T بتواند از داخل براکت خارج شود. پس با فرض $T \in \mathbb{Z}$ داریم:

$$\sin\pi([x]+T) = \sin\pi[x] \Longrightarrow \sin(\pi[x]+\pi T) = \sin\pi[x]$$

برای پیداکردن دوره‌ی تناوب اصلی باید $\pi T = 2\pi$ باشد. بنابراین $T = 2$.

۳ $f(x+T) = f(x) \Longrightarrow \sin[\pi(x+T)] = \sin[\pi x] \Longrightarrow \sin[\pi x + \pi T] = \sin[\pi x]$

در این‌جا نیز بحث مانند مسئله‌ی اول است. اگر بخواهیم تساوی بالا برقرار باشد، باید πT به صورت $\pi T = 2\pi$ از براکت خـارج شـود. امـا اگـر $\pi T = 2\pi$ باشـد، آن‌گاه مقداری صحیح نیست و نمی‌توانسته از داخل براکت خارج شود. بنابراین این تابع، متناوب نیست.

با انجام عملیات مشابه روی نسبت‌های مثلثاتی $\cos[x]$، $\cos\pi[x]$، $\tan[x]$، $\tan\pi[x]$، $\cot[x]$ و $\cot\pi[x]$ به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم:

در حالتی که کمان داخل یک نسبت مثلثاتی دارای جزءصحیح x باشد، فقط وقتی می‌تواند متناوب باشد که در پشت کل جزءصحیح ضریبی از π ضرب شده باشد.

در این حالت داریم:

$$f(x) = \sin\pi[x] \quad , \quad f(x) = \cos\pi[x] \Longrightarrow T = 2$$

$$f(x) = \tan\pi[x] \quad , \quad f(x) = \cot\pi[x] \Longrightarrow T = 1$$

فرمول‌های لازم و ضروری در مثلثات

$$\sin^2 x = \frac{1}{1+\cot^2 x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

برای به دست آوردن نسبت‌های $(\alpha-\beta)$ فقط کافی است در همین فرمول‌ها β را تبدیل به $(-\beta)$ کنید.

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

$$\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

$$a\sin x + b\cos x = \frac{a}{|a|}\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\tan^{-1}\frac{b}{a})$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$$

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta))$$

$$\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

عجیب‌ترین بازی فوتبال سال ۱۹۴۵ بین دو تیم آرسنال و دیناموی مسکو انجام گرفت. داور بازی با وجود مه غلیظی که زمین بازی را فرا گرفته بود دستور به شروع بازی داد. این مه غلیظ باعث شد وقتی داور یکی از بازیکنان آرسنال را از زمین بازی اخراج کرد، او یواشکی دوباره وارد بازی شود! کمی بعد تیم دیناموی مسکو یک تعویض انجام داد اما بازیکنی که باید از زمین خارج می‌شد با سوء استفاده از مه غلیظ در زمین ماند. حتی عده‌ای عقیده دارند، روس‌ها در این دیدار به جای ۱۱ بازیکن، ۱۵ بازیکن در زمین داشتند! در میانه‌های بازی دروازه‌بان آرسنال که می‌خواست توپی را مهار کند، به تیر دروازه برخورد کرد و چون آرسنال دیگر دروازه بانی برای تعویض نداشت، یکی از تماشاچیان طرفدار تیم داخل دروازه ایستاد!