مقدمه

سلام به فصل ۲ خوش اومدین! این فصل همون‌طور که از اسمش معلومه، شامل دو بخش درباره‌ی خط و صفحه‌اس ما هم یه بخش می‌ذاریم روش که با این حساب میشه ۳ بخش!

توی بخش اول این فصل درباره‌ی خطوط در فضای ۳ بعدی صحبت می‌کنیم؛ توی این بخش یاد می‌گیریم چه‌جوری باید خط رو توی دستگاه سه بعدی معرفی کنیم، هم‌چنین وضعیت نسبی دو خط و فاصله‌ی نقطه تا خط از مباحث مهم بخش ۱ به شمار میان.

موضوع بخش ۲، صفحاته. توی این بخش عناوین مشابهی داریم؛ مثلاً یاد می‌گیریم که صفحه رو چه‌جوری باید معرفی کرد، یا فاصله‌ی نقطه تا صفحه چه‌جوری حساب میشه. البته یه سری مباحث اشتراکی بین خط و صفحه هستن که اون‌ها هم توی بخش ۲ مطرح میشن، وضعیت نسبی خط و صفحه از شاخص‌ترین این مباحثه.

در بخش آخر فصل هم به تصویر و قرینه می‌پردازیم. تو این بخش با طرح تمرین و تست، یاد می‌گیریم که چه‌جوری میشه نقطه، خط و صفحه رو نسبت به هم قرینه یا روی هم تصویر کرد.

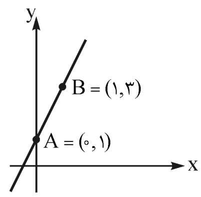
و آخرین نکته این‌که، توی این فصل از مباحث مطرح‌شده در فصل قبل (مثل ضرب داخلی و خارجی) استفاده می‌کنیم، پس قبل از شروع یه مروری روی روابط داشته باشین.

فصل خوبی رو براتون آرزو می‌کنم. همراهتان هستیم، همراهمان باشید!

بخش اول
خط

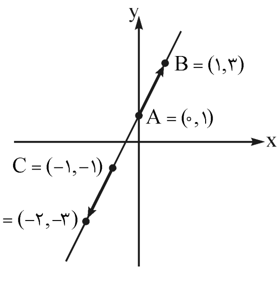
آن‌چه گذشت ...

شما از گذشته با خط در فضای دوبعدی آشنا هستین. توی دستگاه مختصات دکارتی، خط دوتا ویژگی مهم داره؛ یکی شیب و دیگری عرض از مبدأ. معادله‌ی خطی با شیب a و عرض از مبدأ b به صورت مقابل نوشته می‌شه: $y = ax + b$



برای نمایش خط در دستگاه دکارتی، دو نقطه از خط رو پیدا کرده و به هم وصل می‌کردیم. مثلاً برای ترسیم خط $y = ۲x + ۱$، نقاط $A = (۰,۱)$ و $B = (۱,۳)$ که هر دو روی خط قرار دارن رو توی دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم و بعدش اون‌ها رو به هم وصل می‌کنیم. این‌جوری:

توجه کنین که خط $y = ۲x + ۱$ راستا داره. پس میشه راستای اون رو با یه بردار معرفی کرد که البته طول این بردار واسمون مهم نیست. به این بردار، **بردار هادی** خط یا **بردار جهت** خط می‌گیم.



مثلاً بردار نظیر پیکان $\overrightarrow{AB}$ می‌تونه یه کاندید واسه بردار هادی خط ما باشه. داریم: $\vec{u} = B - A = (۱,۲)$

توجه کنین که اگه به جای A و B، دو نقطه‌ی دیگه از خط مثل C و D رو در نظر می‌گرفتیم، پیکان‌های $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ موازی می‌شدن. پس هر دو پیکان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ می‌تونن به عنوان بردار هادی خط در نظر گرفته بشن. (به شکل نگاه کنید.)

همون‌طور که توی شکل هم مشاهده می‌کنین، تنها راستای بردار هادی اهمیت داره و حتی جهتش هم برامون مهم نیست. (توی فصل قبل درباره‌ی تفاوت بین راستا و جهت، صحبت کردیم.)

حالا دوباره به معادله‌ی خط L نگاه کنین. بیاین یه تغییری توی شکل معادله‌ی خط ایجاد کنیم: $L: y = ۲x + ۱ \Rightarrow ۲x = y - ۱ \Rightarrow \frac{x - ۰}{۱} = \frac{y - ۱}{۲}$

شاید پیش خودتون بگین کاری که کردیم بی‌دلیل بود! ولی اگه یه کم دقت می‌کردین این حرف رو نمی‌زدین! نگاه کنین:

$$A = (۰,۱)$$
$$L: \frac{x - ۰}{۱} = \frac{y - ۱}{۲}$$
$$\vec{u} = (۱,۲)$$

همون‌طور که دیدین، با معرفی خط L به این روش، میشه بردار هادی و یه نقطه از خط رو با نگاه‌کردن به معادله پیدا کرد.

توجه کنین که این روش معرفی، یکتا نیست. یعنی خط L رو میشد مثلاً به شکل روبه‌رو هم معرفی کرد: $L: \frac{x - ۱}{۲} = \frac{y - ۳}{۴}$

این خط، همون خط قبلیه؛ فقط این بار از نقطه‌ی $B = (۱,۳)$ و بردار $۲\vec{u}$ برای معرفیش استفاده کردیم. به این روش برای معرفی خط، **«روش معادلات متقارن»** گفته میشه.

علاوه بر این روش، روش دیگه‌ای هم برای معرفی خط وجود داره. برای استفاده از این روش، کافیه طرفین معادلات متقارن رو برابر با پارامتر t قرار بدیم. این‌جوری:
$$\frac{x}{۱}=\frac{y-۱}{۲}=t \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=۲t+۱ \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

برای معرفی خط توی این روش، از پارامتر t استفاده کردیم و به همین دلیل به این روش «**روش معادلات پارامتری**» می‌گیم. توجه کنین که به ازای هر مقدار t، معادلات پارامتری، یه نقطه از خط رو نشون می‌ده، پس می‌تونیم نقاط این خط رو به صورت روبه‌رو معرفی کنیم: $P=(t,۲t+۱)$

به نقطه‌ی P، **نقطه‌ی شناور** خط L می‌گیم؛ چون با تغییردادن t، نقطه‌ی P روی خط L شنا می‌کنه!

تمرین **برای خط** $L: y=۲x+۲$ **موارد زیر را به دست آورید:**

الف) معادله‌ی متقارن **ب) معادلات پارامتری** **ج) نقطه‌ی شناور**

الف برای تبدیل معادله‌ی فعلی به معادله‌ی متقارن، باید کاری کنیم که ضرایب x و y به صورت مخرج ظاهر بشن؛ پس کافیه طرفین معادله رو بر ۲ تقسیم کنیم:
$$y=۲x+۲ \Rightarrow \frac{y}{۲}=\frac{x+۱}{۱} \Rightarrow \boxed{L:\frac{x+۱}{۱}=\frac{y}{۲}}$$

توجه کنین، واسه این x رو سمت چپ می‌نویسیم که ترتیب مؤلفه‌های بردار هادی رعایت بشه، یعنی داشته باشیم: $\vec{u}=(۱,۲)$

ب برای به دست آوردن معادلات پارامتری باید کسرهای معادله‌ی متقارن رو برابر t قرار بدیم. این معادلات برابر میشن با:
$$L:\begin{cases} x=t-۱ \\ y=۲t \end{cases}$$

ج نقطه‌ی شناور این خط هم از روی معادلات پارامتری به سادگی به دست میاد: $P=(t-۱,۲t)$

معادلات خط در دستگاه مختصات سه‌بعدی

خب! بعد از این مقدمه‌ی پر و پیمون وارد بحث اصلی می‌شیم! کتاب درسی توی این بخش، خط رو توی فضای سه‌بعدی بررسی کرده و اون رو با دو روش «معادلات پارامتری» و «معادلات متقارن» معرفی کرده.

معادلات پارامتری

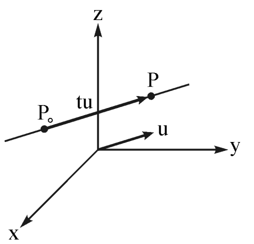
توی تمرین زیر به روش معادلات پارامتری برای معرفی خط در فضای سه‌بعدی می‌پردازیم.

تمرین **معادله‌ی خطی شامل نقطه‌ی معلوم** $P_\circ=(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ **و موازی با بردار ناصفر** $\vec{u}=(p,q,r)$ **را به دست آورید.**

همون‌طور که توی مقدمه گفتیم اگه یه نقطه مثل $P=(x,y,z)$ رو به $P_\circ$ وصل کنیم، پیکان $\overrightarrow{P_\circ P}$ با بردار $\vec{u}$ موازی میشه، پس میشه گفت: $\overrightarrow{P_\circ P}=t\vec{u}$

حالا داریم:
$$\overrightarrow{P_\circ P}=t\vec{u} \Rightarrow (x-x_\circ,y-y_\circ,z-z_\circ)=t(p,q,r) \Rightarrow \begin{cases} x=x_\circ+pt \\ y=y_\circ+qt \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=z_\circ+rt \end{cases}$$

و به این ترتیب معادلات پارامتری خط به دست اومد. این معادلات بسیار شبیه به اون چیزیه که برای خط در دو بعد به دست آورده بودیم. مختصات نقطه‌ی شناور P هم برابر میشه با:
$$P=(x_\circ+pt\ ,\ y_\circ+qt\ ,\ z_\circ+rt) \quad (t\in\mathbb{R})$$



در یک کلام

خط L شامل نقطه‌ی $P_\circ=(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ **و موازی با بردار ناصفر** $\vec{u}=(p,q,r)$ **را به روش پارامتری، این‌گونه نمایش می‌دهیم:**
$$L:\begin{cases} x=x_\circ+pt \\ y=y_\circ+qt \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=z_\circ+rt \end{cases}$$

تمرین **خطی، شامل نقطه‌ی $P=(۲,۳,۱)$ و موازی با بردار $\vec{u}=(۲,۰,-۱)$ را به روش پارامتری معرفی کرده و نشان دهید نقطه‌ی $A=(۴,۳,۰)$ روی این خط قرار دارد.**

این از معادلات:

$$\begin{cases} x=۲+۲t \\ y=۳ \qquad (t\in\mathbb{R}) \\ z=۱-t \end{cases}$$

حالا برای $t=۱$ نقطه‌ی $A=(۴,۳,۰)$ به دست میاد، پس این نقطه روی خطمون قرار داره.

تمرین **خط L را به روش پارامتری طوری معرفی کنید که شامل نقاط $A=(۰,۳,۲)$ و $B=(-۱,۴,۲)$ باشد.**

واسه این‌که از روش پارامتری استفاده کنیم باید یه نقطه از خط و بردار هادی خط رو داشته باشیم ولی این‌جا دوتا نقطه داریم. اما با دوتا نقطه هم کارمون راه میفته چون پیکان $\overrightarrow{AB}$ رو می‌تونیم به عنوان بردار هادی خط در نظر بگیریم. داریم:

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(-۱,۱,۰) \xrightarrow{A=(۰,۳,۲)} \begin{cases} x=-t \\ y=۳+t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=۲ \end{cases}$$

توجه کنین این بار هم معرفی خط به روش پارامتری، شکل یکتایی نداره! مثلاً اگه از نقطه‌ی B برای معرفی خط استفاده کنیم، خواهیم داشت:

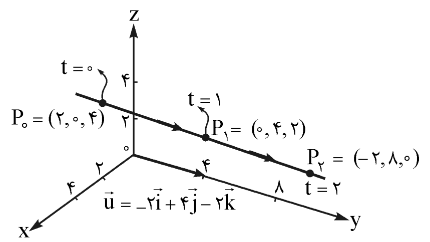
$$\overrightarrow{AB}=(-۱,۱,۰) \xrightarrow{B=(-۱,۴,۲)} \begin{cases} x=-۱-t' \\ y=۴+t' \quad (t'\in\mathbb{R}) \\ z=۲ \end{cases}$$

که این در واقع همون خط L هست (قرار بدین $t'=t-۱$).

تمرین **نقطه‌ی شناور خط $L:(x=۲-۲t\ ,\ y=۴t\ ,\ z=۴-۲t)$ را یافته و سه نقطه از خط را به دلخواه معرفی کنید.**

نقطه‌ی شناور خطمون این شکلیه: $P=(۲-۲t,۴t,۴-۲t)$

حالا قرار می‌دیم $t=۰$، $t=۱$ و $t=۲$ تا به ترتیب نقاط $P_۰=(۲,۰,۴)$، $P_۱=(۰,۴,۲)$ و $P_۲=(-۲,۸,۰)$ به دست بیاد.



۱- معادلات خط گذرنده از مبدأ مختصات و موازی با بردار $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ کدام است؟

۱) $(x=۲t-۱\ ,\ y=۲t-۱\ ,\ z=۲t-۱)$ ۲) $(x=t\ ,\ y=t\ ,\ z=t)$

۳) $(x=-t+۳\ ,\ y=-t+۳\ ,\ z=-t+۳)$ ۴) هر سه گزینه صحیح است.

۲- معادلات خط گذرا از نقاط $A=(۳,۰,۲)$ و $B=(-۱,۲,r)$ به شکل $(x=۴t+۳\ ,\ y=-۲t\ ,\ z=t+۲)$ نمایش داده شده است. r کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) -۲ ۴) -۱

۳- نقاط $A=(۱,۲,۳)$ و $B=(۲,۰,۵)$ با نقطه‌ی $C=(۲,a,b)$ هم‌خط‌اند. باقی‌مانده‌ی عبارت $a+b$ بر ۴ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) صفر

معادلات متقارن

به روش دوم برای معرفی خط می‌رسیم. همون‌طور که قبلاً هم اشاره کردم به این روش، معادلات متقارن می‌گیم.

توی روش پارامتری، معادلات خط موازی بردار $\vec{u}=(p,q,۰)$ و گذرا از نقطه‌ی $P_۰=(x_۰,y_۰,z_۰)$ رو به شکل زیر، نمایش دادیم.

$$\begin{cases} x=x_۰+pt \\ y=y_۰+qt \\ z=z_۰+rt \end{cases}$$

حالا اگه p، q و r هر سه ناصفر باشن، داریم:

$$\begin{cases} x = x_\circ + pt \Rightarrow t = \dfrac{x-x_\circ}{p} \\ y = y_\circ + qt \Rightarrow t = \dfrac{y-y_\circ}{q} \\ z = z_\circ + rt \Rightarrow t = \dfrac{z-z_\circ}{r} \end{cases} \Rightarrow t=t=t \Rightarrow \frac{x-x_\circ}{p} = \frac{y-y_\circ}{q} = \frac{z-z_\circ}{r}$$

همون‌طور که می‌بینید این دقیقاً همون چیزیه که برای خط در دو بعد به دست آوردیم و فقط جمله‌ی مربوط به zها بهش اضافه شده.

در یک کلام

خط شامل نقطه‌ی $P_\circ = (x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ و موازی با بردار $\vec{u} = (p,q,r)$ با مؤلفه‌های ناصفر را به روش معادلات متقارن این‌گونه نمایش می‌دهیم: $\dfrac{x-x_\circ}{p} = \dfrac{y-y_\circ}{q} = \dfrac{z-z_\circ}{r}$

من هر موقع می‌خوام معادلات متقارن یه خط رو بنویسم، اول کسرها و مساوی‌ها رو می‌ذارم: $\dfrac{}{} = \dfrac{}{} = \dfrac{}{}$

بعد بردار هادی رو استاد می‌کنم (مثلاً بردار $\vec{u} = (۱,۲,۳)$): $\dfrac{}{۱} = \dfrac{}{۲} = \dfrac{}{۳}$

آخرش هم کاری می‌کنیم که نقطه‌ی $P_\circ$ (مثلاً $P_\circ = (۲,-۱,۱)$) توش صدق کنه. $\dfrac{x-۲}{۱} = \dfrac{y+۱}{۲} = \dfrac{z-۱}{۳}$

تمرین **خط شامل نقطه‌ی $P = (۲,۳,۱)$ و موازی با بردار $\vec{u} = (۲,۱,-۱)$ را به روش معادلات متقارن معرفی کرده و نشان دهید نقطه‌ی $A = (۴,۴,۰)$ روی این خط است.**

$$\xrightarrow[\text{متقارن}]{\text{نوشتن معادلات}} \frac{x-۲}{۲} = \frac{y-۳}{۱} = \frac{z-۱}{-۱} \Rightarrow \frac{x-۲}{۲} = y-۳ = ۱-z$$

از طرفی $A = (۴,۴,۰)$ در این معادلات صدق می‌کنه:

$$\frac{۴-۲}{۲} = ۴-۳ = ۱-۰ \Rightarrow ۱=۱=۱$$

پس A روی خط قرار داره.

تمرین **خط L را به روش معادلات متقارن طوری معرفی کنید که شامل نقاط $A = (۰,۳,۳)$ و $B = (-۱,۴,۲)$ باشد.**

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-۱,۱,-۱) \begin{cases} \xrightarrow{A=(۰,۳,۳)} \dfrac{x}{-۱} = \dfrac{y-۳}{۱} = \dfrac{z-۳}{-۱} \\ \xrightarrow{B=(-۱,۴,۲)} \dfrac{x+۱}{-۱} = \dfrac{y-۴}{۱} = \dfrac{z-۲}{-۱} \end{cases}$$

دو معادلات بالا هم، با هم هم‌ارزن. (راستی می‌دونین واسه چی به جای معادله می‌گیم معادلات!؟)

تمرین **معادلات متقارن خط L به صورت $\dfrac{x-۱}{۲} = \dfrac{y+۲}{۳} = \dfrac{z}{۴}$ است. معادلات پارامتری این خط را به دست آورید.**

کافیه هر سه عبارت رو مساوی t قرار بدیم:

$$\frac{x-۱}{۲} = \frac{y+۲}{۳} = \frac{z}{۴} = t \Rightarrow \begin{cases} x = ۲t+۱ \\ y = ۳t-۲ \\ z = ۴t \end{cases}$$

البته همون‌طور که بارها هم اشاره کردم این نمایش یکتا نیست.

۴- معادلات خط $L: \dfrac{x}{۲} = \dfrac{y+۱}{۲} = \dfrac{z-۱}{-۱}$ با چند مورد از معادلات خط زیر هم‌ارز است؟

الف) $A: \dfrac{x}{۴} = \dfrac{y+۱}{۴} = \dfrac{z-۱}{-۲}$ ب) $B: \dfrac{x+۲}{۲} = \dfrac{y+۳}{۲} = \dfrac{z-۲}{-۱}$ ج) $C: \dfrac{x+۱}{۲} = \dfrac{y+۲}{۲} = ۲-z$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۵- خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A = (-۱,۲,۱)$ و $B = (۲,۱,-۱)$ از کدام نقطه می‌گذرد؟ *(سراسری ۸۶)*

۱) $(۵,۰,-۳)$ ۲) $(۵,۰,-۲)$ ۳) $(۴,۰,-۳)$ ۴) $(۴,۰,-۲)$

راستی همیشه جناب طراح، مهربون نیست و معادله‌ی خط رو مثل آدم نمی‌ده! مثلاً ممکنه بگه: خط L با معادلات $x=۲y+۱=۵z$ مفروض است.
همون‌طور که دیدن قیافه‌ی معادلات بالا با اون چیزی که تحت عنوان «معادلات متقارن» گفتیم متفاوته؛ پس باید شکلش رو استاندارد کنیم.
اگه دقت کنین می‌بینین که توی معادلات متقارن، ضرایب x ، y و z به صورت مخرج کسر بودن، پس باید طرفین این معادلات رو بر ۱۰ تقسیم کنیم:

$$x=۲y+۱=۵z \Rightarrow \frac{x}{۱۰}=\frac{۲y+۱}{۱۰}=\frac{۵z}{۱۰} \Rightarrow \frac{x}{۱۰}=\frac{y+\frac{۱}{۲}}{۵}=\frac{z}{۲}$$

تمرین **خط L با معادلات $۳x-۱=y=\frac{z}{۲}-۱$ مفروض است. بردار $\vec{u}$ را طوری بیابید که با L موازی باشد.**

همون‌طور که می‌دونین مؤلفه‌های $\vec{u}$، همون مخرج‌های x ، y و z توی معادلات متقارن هستن، پس کافیه معادلات خط L رو استاندارد کنیم.

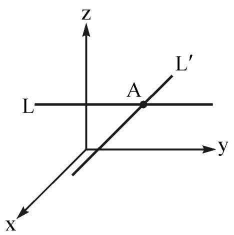
برای این کار عبارت‌ها رو تقسیم بر ۳ می‌کنیم:

$$۳x-۱=y=\frac{z}{۲}-۱ \Rightarrow \frac{۳x-۱}{۳}=\frac{y}{۳}=\frac{\frac{z}{۲}-۱}{۳} \Rightarrow x-\frac{۱}{۳}=\frac{y}{۳}=\frac{z-۲}{۶}$$

حالا از روی معادلات، میشه فهمید که بردار هادی خط L برابر (۳،۳،۶) هست.

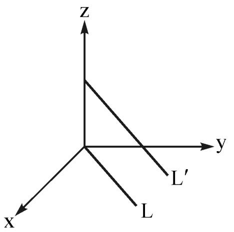
توجه هر بردار موازی با $\vec{u}$، با خطمون هم موازیه، پس مثلاً می‌تونیم بردار $\vec{u}'=(۱،۱،۲)$ رو هم یه جواب در نظر بگیریم.

وضعیت نسبی دو خط در فضا



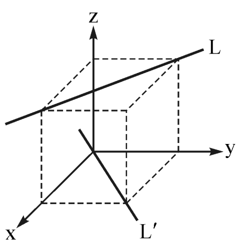
قبل از این‌که وارد این موضوع بشیم بهتره یه مرور کوتاه روی بخش فضایی هندسه (۲) داشته باشیم و معنی سه‌تا واژه رو یادآوری کنیم.
واژه‌ی اول «متقاطع» هست. می‌گیم دوتا خط متقاطع هستن، اگه همدیگرو تو یه نقطه قطع کنن. مثلاً L و L′، با معادلات زیر متقاطع هستن؛ چون همدیگرو توی $A=(۲،۳،۲)$ قطع می‌کنن:

$$\begin{cases} L: x=۲, z=۲ \\ L': y=۳, z=۲ \end{cases}$$



واژه‌ی دوم، «موازی» هست. می‌گیم دوتا خط موازی‌اند، اگه بردار جهت اون‌ها با هم موازی باشه.
مثلاً L و L′ با معادلات زیر موازی هستن؛ چون بردار جهت جفتشون $\vec{u}=(۱،۱،۰)$ هست:

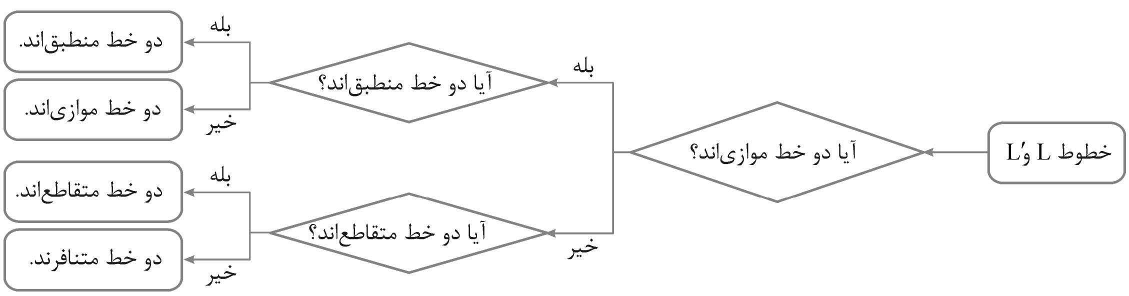
$$\begin{cases} L: z=۰, x=y \\ L': z=۳, x=y \end{cases}$$



توجه کنین حالت منطبق در واقع زیر حالت موازی هست و تو این حالت دو خط کاملاً روی هم میفتن.
و بالاخره واژه‌ی سوم، «متنافر» هست؛ در این حالت دو خط نه موازی‌اند و نه متقاطع. مثلاً خطوط L و L′ توی شکل مقابل با هم متنافر هستن.

$$\begin{cases} L: z=۳, x+y=۱ \\ L': z=۰, x=y \end{cases}$$

ولی توی سؤال‌ها به ما شکل نمی‌دن! بلکه معادلات خطوط رو می‌دن و می‌گن این دو خط نسبت به هم چه‌جوری هستن؟!
برای تشخیص وضعیت نسبی دو خط از روی معادلات، از الگوریتم زیر استفاده می‌کنیم:



با توجه به این الگوریتم، اول باید ببینیم که دو خط موازی هستن یا نه؟ برای این کار باید توازی بردارهای هادی اون‌ها رو بچکیم اگه موازی بودن، می‌ریم سراغ انطباق. برای چک‌کردن انطباق، کافیه یه نقطه از خط اول رو در نظر بگیریم و ببینیم رو دومی هست یا نه.

حالا اگه دو خط داده شده موازی نبودن، چک می‌کنیم متقاطع‌اند یا نه؟ برای چک‌کردن تقاطع، از نقطه‌ی شناور کمک می‌گیریم. در مثال بعدی با نحوه‌ی این استفاده آشنا می‌شیم. حالا اگه متقاطع بودن که می‌گیم متقاطع‌ان ولی اگه نبودن، معلوم میشه که نه موازی بودن و نه متقاطع (چون قبلاً از تست توازی رد شده بودن!)، پس متنافر میشن.

تمرین **وضعیت نسبی خط L به معادلات** $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=z$ **با هر یک از خطوط زیر را بیابید.**

الف) $L_1: \frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{3}=z$ **ب)** $L_2: x-2=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{4}$ **ج)** $L_3: \frac{x+1}{3}=y=\frac{z-1}{2}$

الف **گام اول**: آیا دو خط موازی‌اند؟ بله چرا که بردارهای هادی‌شون موازیه.

گام دوم: آیا دو خط منطبق‌اند؟ کافیه بررسی کنیم که یه نقطه از L روی L_1 هست یا نه. نقطه‌ی $A=(1,0,0)$ متعلق به L رو در نظر می‌گیریم:

$$A\overset{?}{\in}L_1 \Rightarrow \frac{1-3}{2}\overset{?}{=}\frac{0-3}{3}\overset{?}{=}0 \Rightarrow -1\overset{?}{=}-1\overset{?}{=}0$$ ☒

پس دو خط منطبق نبوده و موازی هستن.

ب **گام اول**: آیا دو خط موازی‌اند؟ خیر چون $(1,2,4)\nparallel(2,3,1)$

گام دوم: آیا دو خط متقاطع‌اند؟ برای چک‌کردن تقاطع، نقطه‌ی شناور خط L رو توی خط L_2 می‌ذاریم؛ اگه به ازای یه مقدار $t\in\mathbb{R}$ صدق کرد یعنی یه نقطه از L، روی L_2 قرار داره پس دو خط متقاطع میشن. در غیر این صورت متنافر خواهند بود. حالا:

$$\text{نقطه‌ی شناور L} = P=(2t+1,3t,t) \xrightarrow[\text{می‌ذاریم } L_2]{\text{نقطه رو در معادله‌ی}} (2t+1)-2=\frac{(3t)-1}{2}=\frac{(t)+3}{4} \Rightarrow 2t-1=\frac{3t-1}{2}=\frac{t+3}{4}$$

از این‌که $\frac{3t-1}{2}=2t-1$ نتیجه می‌گیریم $t=1$ حالا $t=1$ رو جای‌گذاری می‌کنیم:

$$2(1)-1\overset{?}{=}\frac{3(1)-1}{2}\overset{?}{=}\frac{(1)+3}{4} \Rightarrow 1\overset{?}{=}1\overset{?}{=}1$$ ☑

پس دو خط متقاطع هستن. نقطه‌ی تقاطع هم به ازای $t=1$ در $P=(2t+1,3t,t)$ به دست میاد. داریم $P=(3,3,1)$.

ج **گام اول**: آیا دو خط موازی‌اند؟ خیر چرا که $(3,1,2)\nparallel(2,3,1)$

گام دوم: آیا دو خط متقاطع‌اند؟ باید P رو توی L_3 بذاریم:

$$P=(2t+1,3t,t) \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در } L_3} \frac{(2t+1)+1}{3}=(3t)=\frac{(t)-1}{2} \Rightarrow \frac{2t+2}{3}=3t=\frac{t-1}{2}$$

از این‌که $\frac{2t+2}{3}=3t$ نتیجه می‌گیریم $t=\frac{2}{7}$. حالا این مقدار رو جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{\frac{4}{7}+2}{3}\overset{?}{=}\frac{6}{7}\overset{?}{=}\frac{\frac{2}{7}-1}{7} \Rightarrow \frac{6}{7}\overset{?}{=}\frac{6}{7}\overset{?}{=}-\frac{5}{49}$$ ☒

پس دو خط متنافرن.

۶- دو خط $L: x=y+1=z-1$ **و** $L': \frac{x}{2}=y=\frac{z}{3}$ **در نقطه‌ی** $A=(a,b,c)$ **متقاطع‌اند.** $a+b+c$ **کدام است؟**

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۴

۷- اگر دو خط $L: \frac{x}{2}-\beta=y-\alpha=z$ **و** $L': x-\alpha=y+\beta=z$ **در نقطه‌ی** $A=(1,1,k)$ **متقاطع باشند، عبارت** $2\alpha-\beta$ **کدام است؟**

۱) ۳/۴ ۲) ۱/۲ ۳) ۱/۴ ۴) ۱

۸- دو خط به معادلات مقابل نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

$$d: \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{3}$$
$$d': (x=2t+4, y=2+t, z=3t+6)$$

۱) موازی‌اند. ۲) منطبق‌اند.

۳) متقاطع‌اند. ۴) متنافرند.

۹- دو خط به معادلات $(x=t, y=t+2, z=-2t-1)$ **و** $\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z}{-1}$**، نسبت به هم کدام وضعیت را دارند؟** *(سراسری ۸۲)*

۱) متنافر ۲) متقاطع ۳) موازی ۴) منطبق

۱۰- به ازای کدام مقدار a خطوط $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$, $\frac{x-3}{1}=\frac{y+a}{2}=-z$ **متقاطع‌اند؟** *(سراسری ۸۵)*

۱) ۵- ۲) ۳- ۳) ۳ ۴) ۵

۱۱- اگر دو خط به معادلات $L_2: \frac{x-3}{a}=y=z$, $L_1: x=y-1=\frac{z}{2}$ **متقاطع باشند، آن‌گاه a کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳- ۴) ۱-

خطوط خاص

توی شروط معادلات متقارن گفتیم هیچ‌کدوم از مؤلفه‌های بردار هادی نباید صفر باشه. حالا اگه یک یا دو مورد از مؤلفه‌ها صفر بودن چی؟

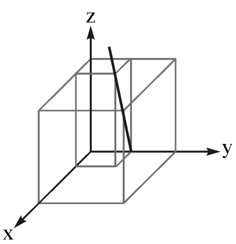
مثلاً اگه گفتن: «معادلات متقارن خط گذرا از نقطه‌ی $A=(۱,۲,۳)$ و موازی با بردار $\vec{u}=(۳,۱,۰)$ رو بنویسید» بگیم نمیشه!؟ یا عبارت زیر رو تحویلشون بدیم: $\frac{x-۱}{۳}=\frac{y-۲}{۱}=\frac{z-۳}{۰}$

عبارت بالا که از لحاظ ریاضی تعریف نشده‌اس! پس بالاخره چی کار کنیم؟!

پیشنهاد می‌کنم بیاین معادلات پارامتری رو بنویسیم، شاید چیزی دستگیرمون بشه:

$$(x=x_۰+pt\,,\,y=y_۰+qt\,,\,z=z_۰+rt)\ \Rightarrow\ (x=۱+۳t\,,\,y=۲+t\,,\,z=۳)$$

از این معادلات میشه فهمید z همیشه برابر ۳ هست، پس میشه به جای عبارت تعریف‌نشده‌ی $\frac{z-۳}{۰}$ از عبارت $z=۳$ استفاده کرد. پس معادلات متقارن به فرم روبه‌رو درمیاد: $\frac{x-۱}{۳}=\frac{y-۲}{۱}\,,\,z=۳$



بردار هادی این خط بر محور zها عموده (چرا؟)، پس خود خط هم بر این محور عمود هست. توجه کنین برای این‌که دو خط بر هم عمود باشن لازم نیست همدیگرو قطع کنن. (جلوتر در این‌باره بیشتر صحبت می‌کنیم.)

حالا اگه بخواییم این خط رو رسم کنیم، کافیه دوتا نقطش رو به هم وصل کنیم و امتداد بدیم.

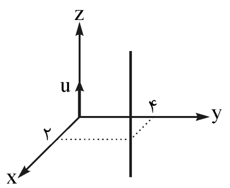
ما این‌جا از نقاط $A=(۱,۲,۳)$ و $B=(۴,۳,۳)$ استفاده کردیم.

تمرین **معادلات خط گذرنده از نقاط $A=(۳,۴,۱)$ و $B=(۲,۴,۳)$ را بنویسید.**

بردار جهت این خط برابر $\vec{u}=(۱,۰,-۲)$ هست. همون‌طور که می‌بینین مؤلفه‌ی دوم این بردار صفر هست، پس باید از روش اخیر برای معرفی این خط استفاده کنیم: $x-۳=\frac{z-۱}{-۲}\ ,\ y=۴$

حالا حالتی رو بررسی می‌کنیم که دوتا از مؤلفه‌ها، صفر باشن. مثلاً به ما گفتن معادلات متقارن خط گذرا از نقطه‌ی $P=(۲,۴,۱)$ و موازی با بردار $\vec{u}=(۰,۰,۱)$ را بنویسید.

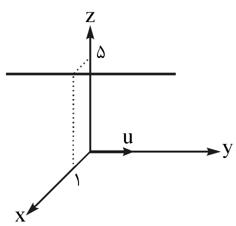
این بار هم از معادلات پارامتری کمک می‌گیریم: $(x=x_۰+pt\,,\,y=y_۰+qt\,,\,z=z_۰+rt)\ \Rightarrow\ (x=۲\,,\,y=۴\,,\,z=۱+t)$



همون‌طور که می‌بینین x و y همیشه به ترتیب ۲ و ۴ هستن. از طرفی مقدار z به مقادیر x و y بستگی نداره و چون t هر عددی می‌تونه باشه، z محدودیتی از نظر مقداری نداره و هر عددی می‌تونه باشه و اصلاً لازم نیست توی معادلات متقارن بنویسیمش. پس شکل معادلات متقارن این خط به شکل روبه‌رو درمیاد: $x=۲\ ,\ y=۴$

توجه کنین که چون $\vec{u}$ با محور zها موازیه $(\vec{u}=\vec{k})$؛ پس خود خطمون هم با این محور موازی هست. پس برای رسمش کافیه از نقطه‌ی $(۲,۴,۰)$ موازی محور zها رسم کنیم.

تمرین **معادلات خط گذرا از دو نقطه‌ی $A=(۱,۲,۵)$ و $B=(۱,۴,۵)$ را به دست آورده و آن را رسم کنید.**



بردار جهت خط $\vec{u}=(۰,۲,۰)$ هست و دوتا مؤلفه‌اش صفره، پس کافیه مقادیر x و z رو مشخص کنیم:

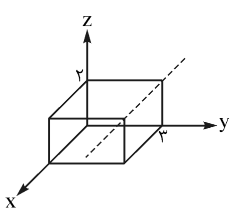
$x=۱\quad,\quad z=۵$

این هم از شکل:

حالا که با نحوه‌ی معرفی خطوط با بردار هادی صفردار آشنا شدیم، آماده‌ایم که خطوط خاص رو مورد بررسی قرار بدیم. دو دسته خط خاص داریم:

الف) خطوط موازی محورهای Ox، Oy و Oz

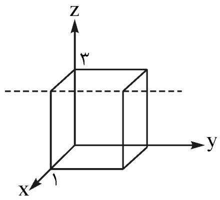
این خطوط، دسته‌ی اول خطوط خاص رو تشکیل میدن.



۱) خطوط موازی محور Ox

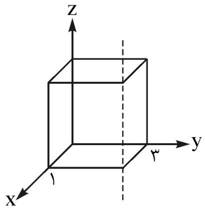
معادله‌ی این خطوط به شکل $(y=b\,,\,z=c)$ بوده و بردار هادی اون‌ها ضریبی از $\vec{i}=(۱,۰,۰)$ هست. برای مثال توی شکل، خط $(y=۳\,,\,z=۲)$ رو می‌بینین.

۲) خطوط موازی محور Oy



معادله‌ی این خطوط به شکل $(x=a\ ,\ z=c)$ بوده و بردار هادی اون‌ها ضریبی از $\vec{j}=(0,1,0)$ هست. برای مثال توی شکل، خط $(x=۱\ ,\ z=۳)$ نمایش داده شده.

۳) خطوط موازی محور Oz

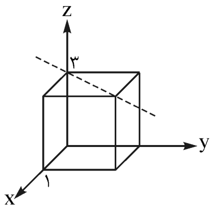


معادله‌ی این خطوط به شکل $(x=a\ ,\ y=b)$ بوده و بردار هادی اون‌ها ضریبی از $\vec{k}=(0,0,1)$ هست. برای مثال توی شکل خط $(x=۱\ ,\ y=۳)$ رو می‌بینین.

ب) خطوط موازی صفحات xOy و xOz یا yOz

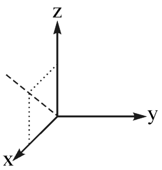
این خطوط، دسته‌ی دوم خطوط خاص رو تشکیل میدن.

۱) خطوط موازی صفحه‌ی xOy



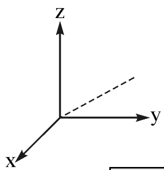
معادله‌ی این خطوط به شکل $z=k$ ، $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}$ بوده و بردار هادی اون‌ها به شکل $\vec{u}=(a,b,0)$ هست. برای مثال توی شکل، خط $(x=y\ ,\ z=۳)$ رو می‌بینین.

۲) خطوط موازی صفحه‌ی xOz



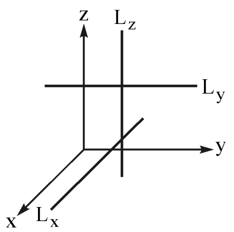
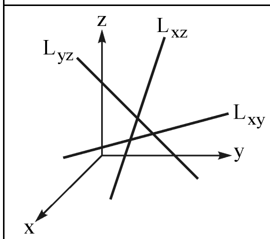
معادله‌ی این خطوط به شکل $\frac{x-x_0}{a}=\frac{z-z_0}{c}\ ,\ y=k$ بوده و بردار هادی اون به شکل $\vec{u}=(a,0,c)$ هست. برای مثال توی شکل، خط $(x=z\ ,\ y=0)$ نمایش داده شده.

۳) خطوط موازی صفحه‌ی yOz



معادله‌ی این خطوط به شکل $\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}\ ,\ x=k$ بوده و بردار هادی اون به شکل $\vec{u}=(0,b,c)$ هست. برای مثال توی شکل، خط $(\frac{y}{۲}=z\ ,\ x=0)$ رو می‌بینین.

این هم از جدول! کم و کسری که ندارین!؟

	وضعیت	بردار هادی	معادله	شکل
موازی با محور	Ox	$\vec{n}_x=\vec{i}$	$L_x: y=y_0\ ,\ z=z_0$	
	Oy	$\vec{n}_y=\vec{j}$	$L_y: x=x_0\ ,\ z=z_0$	
	Oz	$\vec{n}_z=\vec{k}$	$L_z: x=x_0\ ,\ y=y_0$	
موازی با صفحه	xOy	$\vec{n}_{xy}=(a,b,0)$	$L_{xy}: \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}\ ,\ z=z_0$	
	xOz	$\vec{n}_{xz}=(a,0,c)$	$L_{xz}: \frac{x-x_0}{a}=\frac{z-z_0}{c}\ ,\ y=y_0$	
	yOz	$\vec{n}_{yz}=(0,b,c)$	$L_{yz}: \frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}\ ,\ x=x_0$	

۱۲- کدام‌یک از خطوط زیر، بر صفحه‌ی xOy عمود است؟

۱) $z=۳$ ، $x=۲$
۲) $y=۴$ ، $x=۱$
۳) $z=۲$ ، $y=۱$
۴) $z=۲$ ، $x=y$

۱۳- مبدأ مختصات، رأس یک هرم مثلث‌القاعده است. معادله‌ی سه ضلع قاعده‌ی آن $L_1:(۲x+y=۲\ ,\ z=0)$ ، $L_2:(x+z=۱\ ,\ y=0)$ و $L_3:(۲z+y=۲\ ,\ x=0)$ است، حجم آن چند واحد مکعب است؟ *(سراسری ۸۷)*

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) ۱
۴) $\frac{۴}{۳}$

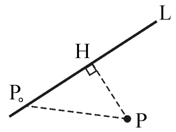
فاصله‌ها

در این قسمت دو چیز رو بررسی می‌کنیم. فاصله‌ی نقطه تا خط و فاصله‌ی دو خط.

فاصله‌ی نقطه تا خط

بعد از آشنایی با خط در فضای سه‌بعدی و معادله‌ی اون، می‌خوایم فاصله‌ی یه نقطه از خط رو حساب کنیم.

مطابق شکل فاصله‌ی P تا خط L برابر $|\overrightarrow{PH}|$ هست. نقطه‌ی $P_\circ$ روی L رو به دلخواه در نظر گرفتیم. مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی $PP_\circ H$ رو از دو روش حساب می‌کنیم:



$$\begin{cases} S=\frac{۱}{۲}\ \text{قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{۱}{۲}|\overrightarrow{PH}||\overrightarrow{P_\circ H}| & ① \\ S=\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{P_\circ P}\times\overrightarrow{P_\circ H}| & ② \end{cases}$$

عبارت‌های بالا برابرن. هم‌چنین $\overrightarrow{P_\circ H}=\vec{u}$ همون بردار هادی L هست. پس:

$$S=S \Rightarrow \frac{۱}{۲}|\overrightarrow{PH}||\vec{u}|=\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{P_\circ P}\times\vec{u}| \Rightarrow |\overrightarrow{PH}|=\frac{|\overrightarrow{P_\circ P}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

در یک کلام

فاصله‌ی نقطه‌ی P از خط L شامل نقطه‌ی $P_\circ$ و موازی با بردار $\vec{u}$، از رابطه‌ی مقابل به دست می‌آید:

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_\circ P}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

تمرین **فاصله‌ی نقطه‌های $P_۱=(۱,۲,۱)$ و $P_۲=(۳,۲,\circ)$ را از خط $L:\frac{x+۱}{۲}=y=\frac{z+۶}{۳}$ بیابید.**

بردار هادی خط برابر $\vec{u}=(۲,۱,۳)$ هست و نقطه‌ی $P_\circ=(-۱,\circ,-۶)$ روی خط قرار داره. حالا:

① فاصله‌ی $P_۱$ تا L: $\overrightarrow{P_\circ P_۱}=(۲,۲,۷)$

$$\Rightarrow \text{فاصله} = \frac{|\overrightarrow{P_\circ P_۱}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}=\frac{|(۲,۲,۷)\times(۲,۱,۳)|}{|(۲,۱,۳)|}=\frac{|(-۱,۸,-۲)|}{|(۲,۱,۳)|}=\frac{\sqrt{۶۹}}{\sqrt{۱۴}}=\sqrt{\frac{۶۹}{۱۴}}$$

② فاصله‌ی $P_۲$ تا L: $\overrightarrow{P_\circ P_۲}=(۴,۲,۶)$

$$\Rightarrow \text{فاصله} = \frac{|\overrightarrow{P_\circ P_۲}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}=\frac{|(۴,۲,۶)\times(۲,۱,۳)|}{|(۲,۱,۳)|}=\frac{|(\circ,\circ,\circ)|}{|(۲,۱,۳)|}=\frac{\circ}{\sqrt{۱۴}}=\circ$$

همون‌طور که دیدین فاصله $P_۲$ تا L صفر شد چون $P_۲$ روی L قرار داشت.

۱۴- فاصله‌ی نقطه‌ی $A=(۱,۲,\circ)$ از خط به معادله‌ی $x=y=z$، کدام است؟ *(خارج از کشور ۸۷)*

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۳

۱۵- فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط گذرنده از دو نقطه‌ی $(۱,۴,\circ)$ و $(۳,۵,-۲)$ کدام است؟ *(خارج از کشور ۸۹)*

۱) $\sqrt{۱\circ}$ ۲) $\sqrt{۱۳}$ ۳) $\sqrt{۱۴}$ ۴) $\sqrt{۱۵}$

۱۶- اگر فاصله‌ی نقطه‌ی $A=(۱,۲,۳)$ از خط $(x=a, y=۶)$ برابر ۵ باشد، a کدام است؟ *(آزاد ۸۲)*

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) -۲ ۴) صفر

۱۷- نقاط $A=(\circ,-۱,۲)$، $B=(۱,\circ,-۱)$ و $C=(۳,۲,۱)$ مفروض‌اند. طول ارتفاع AH از مثلث ABC، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۴\sqrt{۶}}{۳}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۶}}{۲}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۶}}{۴}$

فاصله‌ی دو خط

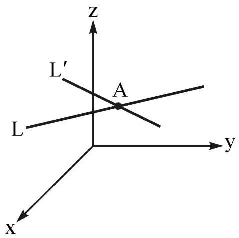
بعد از بررسی فاصله‌ی نقطه از خط نوبت به فاصله‌ی دو خط از هم می‌رسه. توجه کنین منظور از فاصله‌ی دو خط، کوتاه‌ترین فاصله، بین دو خط هست.

فاصله‌ی بین دو خط به وضعیت نسبی اون‌ها بستگی داره.

۱) دو خط منطبق باشند.

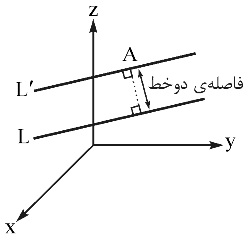
این حالت بعد از سه حالت جامد، مایع و گاز، تابلوترین حالت موجود در عالم هستیه! کاملاً واضحه که تو این حالت فاصله‌ی دو خط برابر صفره!

۲) دو خط متقاطع باشند.



این حالت هم دست کمی از حالت (۱) نداره! در نقطه‌ی تقاطع، فاصله‌ی دو خط برابر صفر هست و چون گفتیم منظور از فاصله‌ی دو خط، کوتاه‌ترین فاصله‌ی دو خطه، پس در این حالت هم فاصله‌ی دو خط، صفره.

۳) دو خط موازی باشند



تو این حالت دیگه فاصله صفر نیست. برای محاسبه‌ی فاصله‌ی دو خط موازی، یه نقطه‌ی دلخواه از یه کدوم از خط‌ها انتخاب می‌کنیم و فاصله‌ی اون نقطه رو از خط دوم به دست می‌آریم این مقدار برابر با فاصله‌ی دو خط هست.

به عنوان تمرین یکی از تمرین‌های کتاب درسی رو حل می‌کنیم.

تمرین **فاصله‌ی دو خط موازی** $L:\frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۱}{-۱}=\frac{z-۲}{-۲}\quad , \quad L':\frac{x}{۲}=\frac{y-۲}{-۱}=\frac{z-۳}{-۲}$ **را پیدا کنید.**

نقطه‌ی $P=(۱,-۱,۲)$ رو از L اختیار می‌کنیم و فاصله‌ی P تا L' رو به دست میاریم. برای این کار باید نقطه‌ای مثل $P_۰=(۰,۲,۳)$ رو از خط L' در نظر بگیریم. داریم:

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_۰P}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}=\frac{|(۱,-۳,-۱)\times(۲,-۱,-۲)|}{|(۲,-۱,-۲)|}=\frac{|(۵,۰,۵)|}{۳}=\frac{۵\sqrt{۲}}{۳}$$

۱۸- فاصله‌ی دو خط به معادلات $D:\frac{x-۱}{۱}=\frac{y+۱}{-۱}=\frac{z}{۲}$ **و** $D':\frac{x}{۲}=\frac{y}{-۲}=\frac{z-۱}{۴}$**، کدام است؟** *(سراسری ریاضی ۸۹)*

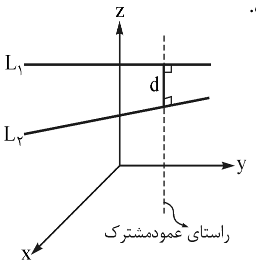
۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹- فاصله‌ی دو خط موازی $L:(x+y=۱\ ,\ z=۱)$ **و** $L':(x+y=۳\ ,\ z=۳)$**، چه‌قدر است؟** *(آزاد ۸۲)*

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۶}$

٤) دو خط متنافر باشند.

این حالت برخلاف دو حالت قبلی، یک‌کم دردسر داره! محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط متنافر ۲ راه داره که یکی از راه‌ها رو این‌جا و راه دیگه رو توی بخش بعد می‌بینیم. از هندسه (۲) می‌دونیم که کوتاه‌ترین پاره‌خط واصل بین دو خط متنافر، بر هر دو خط عموده.



در این‌جا از این ویژگی استفاده می‌کنیم.

نقاط شناور خطوط $L_۱$ و $L_۲$ رو به ترتیب $P_۱$ و $P_۲$ می‌نامیم فاصله‌ی $|\overrightarrow{P_۱P_۲}|$ در واقع فاصله‌ی بین نقاط دو خط $L_۱$ و $L_۲$ هست و وقتی min میشه که $\overrightarrow{P_۱P_۲}$ بر هر دو خط عمود باشد. یعنی داشته باشیم:

$$\begin{cases}\overrightarrow{P_۱P_۲}.\vec{u}_۱=۰\\ \overrightarrow{P_۱P_۲}.\vec{u}_۲=۰\end{cases}$$

اگر پارامتر نقاط شناور $P_۱$ و $P_۲$ رو به ترتیب t و t' بنامیم، دستگاه بالا یه دستگاه دو معادله دو مجهول برحسب t و t' میشه. با به دست آوردن t و t'، مختصات نقاط $P_۱$ و $P_۲$ به دست میاد. فاصله‌ی $|\overrightarrow{P_۱P_۲}|$ برابر فاصله‌ی دو خط متنافر و هم‌چنین خط گذرنده از $P_۱$ و $P_۲$، خط **عمود مشترک** دو خط متنافر هست.

تمرین **فاصله و معادله‌ی عمود مشترک خطوط مقابل را به دست آورید.** $L:x=\frac{y}{۲}=z\quad , \quad L':\frac{x-۱}{۲}=y+۱=\frac{z}{۲}$

تمرین، خودش گفته دو خط متنافرن، پس دیگه لازم نیست وضعیت نسبی دو خط رو بررسی کنیم.

طبق روشی که گفتیم اول باید نقاط شناور P و P' رو تشکیل بدیم:

$$P=(t\,,\,۲t\,,\,t)\quad , \quad P'=(۲t'+۱\,,\,t'-۱\,,\,۲t')\ \Rightarrow\ \overrightarrow{PP'}=(۲t'-t+۱\,,\,t'-۲t-۱\,,\,۲t'-t)$$

حالا نوبت به تشکیل دو معادله دو مجهول می‌رسه:

$$\begin{cases}\overrightarrow{PP'}\cdot\vec{u}=۰\\ \overrightarrow{PP'}\cdot\vec{u'}=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۱(۲t'-t+۱)+۲(t'-۲t-۱)+۱(۲t'-t)=۰\\ ۲(۲t'-t+۱)+۱(t'-۲t-۱)+۲(۲t'-t)=۰\end{cases}\Rightarrow\ t=-\frac{۵}{۶}\quad , \quad t'=-\frac{۲}{۳}$$

حالا با داشتن t و t'، پیکان $\overrightarrow{PP'}$ به دست میاد. از طرفی طول $\overrightarrow{PP'}$ برابر فاصله‌ی بین دو خط هست. پس:

$$\overrightarrow{PP'}=(۲t'-t+۱\,,\,t'-۲t-۱\,,\,۲t'-t)\ \Rightarrow\ \overrightarrow{PP'}=(\frac{۱}{۲},۰,\frac{-۱}{۲})\ \Rightarrow\ d=|\overrightarrow{PP'}|=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

از طرف دیگه با توجه مقادیر t و t' داریم:

$$P=(-\frac{۵}{۶},-\frac{۵}{۳},-\frac{۵}{۶})\qquad P'=(-\frac{۱}{۳},-\frac{۵}{۳},-\frac{۴}{۳})$$

این نقاط روی عمود مشترک دو خط قرار دارن بنابراین معادله عمود مشترک برابر میشه با:

$$x+\frac{۱}{۳}=\frac{z+\frac{۴}{۳}}{-۱}\ ,\ y=-\frac{۵}{۳}$$

۲۰- فاصله‌ی بین دو خط متنافر $L:\frac{x-۱}{۲}=y+۱=\frac{z}{۳}$ **و** $L':x=y=z$ **چه‌قدر است؟**

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۶}$

۲۱- عمودمشترک دو خط $d_۱:(x=۲\,,\,y=۳)$ **و** $d_۲:(x+y=۴\,,\,z=-۱)$ **از کدام نقطه می‌گذرد؟** *(آزاد ریاضی ۸۷)*

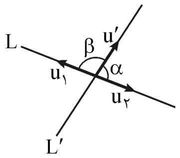
۱) $(۱,۲,۳)$ ۲) $(۲,۲,-۱)$ ۳) $(۱,۲,-۱)$ ۴) $(۲,۱,-۱)$

البته همون‌طور که گفتم روش اصلی برای پیداکردن فاصله‌ی دو خط متنافر رو تو فصل بعد می‌گیم که اون روش، دیگه این همه دنگ‌وفنگ نداره! ولی واسه پیداکردن معادله‌ی عمودمشترک برای خطوط غیر خاص، روش دیگه‌ای وجود نداره. (شرمنده!)

زاویه‌ی بین دو خط متقاطع

بعد از بررسی فاصله‌ها، نوبت به زاویه‌ها می‌رسه. این قسمت مثل قسمت قبل پُر و پیمون نیست! ولی سه‌تا نکته‌ی کمی تا قسمتی مهم داره!

نکته زاویه‌ی دو خط L و L' برابر با زاویه‌ی بین بردار هادی دو خط و مکمل اون زاویه هست.



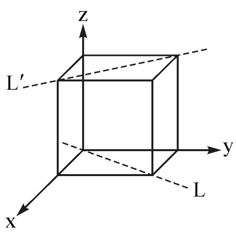
یادآوری: زاویه‌ی بین بردارهای a و b $\Rightarrow\ \cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

نکته برخلاف بردارها، دو خط در فضا با هم دو زاویه می‌سازن که البته این زوایا مکمل همدیگه هستن[1].

مطابق شکل، اگه بردار هادی خط L' رو $\vec{u}'$ و بردار هادی خط L رو به ترتیب $\vec{u}_۱$ و $\vec{u}_۲$ در نظر بگیریم، زوایای α و β به دست میان که داریم:

$\alpha+\beta=۱۸۰^\circ$

نکته برای این‌که دو خط با هم زاویه بسازن، لازم نیست حتماً همدیگر رو قطع کنن!



مثلاً اگه شکل مقابل یه مکعب باشه، خطوط L و L' بر هم عمودن بدون این‌که همدیگر رو قطع کنن.

پس اگه تو تست گفت که دوتا خط بر هم عمودن، نمیشه نتیجه گرفت که متقاطع هم هستن! واسه همین هر وقت تو کنکور مدنظر طراح حالت دوم بوده، از عبارت «عمود متقاطع» استفاده کرده.

تمرین **زاویه‌ای که خط مبدأ گذر مقابل، با سه محور می‌سازد را محاسبه کنید:** $\frac{x}{۲}=y=\frac{z}{۳}$

طبق نکته‌ی ۱ باید زوایای بین بردار هادی خط و با سه محور به دست بیاریم:

$$\vec{u}=(۲,۱,۳)\ \Rightarrow\ \vec{e}_u=\frac{۱}{|\vec{u}|}\vec{u}=(\frac{۲}{\sqrt{۱۴}},\frac{۱}{\sqrt{۱۴}},\frac{۳}{\sqrt{۱۴}})$$

از طرفی داشتیم:

$$\vec{e}_a=(\cos(\alpha),\cos(\beta),\cos(\gamma))$$

پس:

$$\alpha=\cos^{-۱}(\frac{۲}{\sqrt{۱۴}})\,,\,\beta=\cos^{-۱}(\frac{۱}{\sqrt{۱۴}})\,,\,\gamma=\cos^{-۱}(\frac{۳}{\sqrt{۱۴}})$$

البته همون‌طور که اشاره کردم، مکمل هر کدوم از این زوایا رو هم میشه به عنوان زاویه‌ی بین دو خط معرفی کرد.

۲۲- زاویه‌ی خط مبدأ گذر L **با دو محور، برابر ۴۵ درجه است. معادلات این خط کدام است؟**

۱) $x=y=z$ ۲) $z=۰\,,\,x=y$ ۳) $y=۰\,,\,x=z$ ۴) $x=۰\,,\,y=z$

۲۳- کسینوس کوچک‌ترین زاویه‌ی بین دو خط متقاطع $(\frac{x-۳}{۳}=\frac{y}{۴}\,,\,z=۲)$ **و** $(\frac{x-۱}{۲}=y+۱=\frac{z}{۲})$ **چه‌قدر است؟**

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$

۱- معمولاً زاویه‌ی حاده‌ی بین دو خط رو به عنوان زاویه‌ی بین اون‌ها در نظر می‌گیریم.

پاسخ‌های فصل دوم

تست‌های آموزشی

۱- گزینه‌ی «۴» گفتیم که معادلات پارامتری خط L، موازی با بردار $\vec{u}=(a,b,c)$ و گذرا از نقطه‌ی $A=(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ به شکل زیره:

$L:(x=at+x_\circ\,,\,y=bt+y_\circ\,,\,z=ct+z_\circ)\ \ (t\in\mathbb{R})$

حالا توی این تست داریم: $\vec{u}=(۱,۱,۱)$ و $A=(\circ,\circ,\circ)$، پس: $L:(x=t\,,\,y=t,z=t)$

اما عجله نکنین! گفتیم که معادله‌ی خط، از نظر ظاهری یکتا نیست. پس اگه با یه تغییر متغیر ساده توی معادلات فوق قرار بدین $t=۲t'-۱$ خواهیم داشت: $L:(x=۲t'-۱,\,y=۲t'-۱,\,z=۲t'-۱)$

که معادلات ۱ هست و به طریق مشابه با قراردادن $t=-t''+۳$ در معادلات اولیه‌ی خط، ۳ هم به دست میاد. پس جواب میشه ۴ !

۲- گزینه‌ی «۱» با قرارداشتن نقاط A و B روی خط L، میشه نتیجه گرفت که بردار هادی خط L موازی با پیکان $\overrightarrow{AB}=(-۴,۲,r-۲)$ هست. از طرفی بردار هادی خط L، برابر با $\vec{u}=(۴,-۲,۱)$ هستش، پس: $\vec{u}\,||\,\overrightarrow{AB}\ \Rightarrow\ (۴,-۲,۱)\,||\,(-۴,۲,r-۲)\ \Rightarrow\ r=۱$

۳- گزینه‌ی «۱» مسئله‌های هم‌خطی رو قبلاً به کمک بردارها حل می‌کردیم ولی الان این قصد رو نداریم! روش حل جدید اینه که میایم معادله‌ی خط گذرا از نقاط A و B رو پیدا می‌کنیم و بعد نقطه‌ی C رو می‌ذاریم تو معادله!

معادله‌ی خط گذرا از نقاط A و B برابر است با: $L:(x=t+۱,\,y=-۲t+۲,\,z=۲t+۳)\ \ (t\in\mathbb{R})$

حالا باید دید که a و b چی باشن تا نقطه‌ی C تو این معادلات صدق کنه. داریم:

$$C\in L\ \Rightarrow\begin{cases}۲=t+۱\ \Rightarrow\ t=۱\\ a=-۲t+۲\\ b=۲t+۳\end{cases}\Rightarrow\ \begin{cases}a=-۲\times۱+۲=\circ\\ b=۲\times۱+۳=۵\end{cases}$$

پس نقطه‌ی C به شکل $(۲,\circ,۵)$ هست و داریم $a+b=۵$ و باقی‌مونده‌ی ۵ بر ۴ برابر ۱ است.

۴- گزینه‌ی «۲» برای این‌که دوتا معادله‌ی خط هم‌ارز باشن، کافیه بردار هادی‌هاشون موازی باشه و در ضمن یه نقطه‌ی مشترک داشته باشن. با این حرف میشه گزاره‌ها رو بررسی کرد. ولی قبلش باید بردار هادی خط L رو پیدا کرد. داریم: $\vec{u}=(۲,۲,-۱)$

الف بردار هادی این خط برابر $(۴,۴,-۲)$ هست که با بردار $\vec{u}$ موازیه.

نقطه‌ی $(\circ,-۱,۱)$ روی خط L قرار داره و در ضمن توی معادلات خط A صادقه. پس در کل، خط A با L هم‌ارزه.

ب بردار هادی خط B هم با $\vec{u}$ موازیه.

نقطه‌ی $(\circ,-۱,۱)$ بین دو خط B و L مشترکه، پس در کل، خط B هم با خط L هم‌ارزه.

ج در اولین گام، شکل خط رو مثل آدم می‌کنیم (عبارت $z-۲$ غیر آدمی‌زاده!) $C:\frac{x+۱}{۲}=\frac{y+۲}{۲}=\frac{z-۲}{-۱}$

بردار هادی این خط برابر $(۲,۲,-۱)$ بوده که با $\vec{u}$ موازیه.

نقطه‌ی $(\circ,-۱,۱)$ روی L قرار داره ولی توی معادلات خط C صدق نمی‌کنه، پس این دو خط هم‌ارز نیستن. توجه کنین که می‌تونستیم به جای چک‌کردن بردار هادی و یه نقطه، دوتا نقطه رو چک کنیم.

۵- گزینه‌ی «۱» معادله‌ی خط گذرا از نقاط A و B به شکل روبه‌رو است: $L:\frac{x+۱}{۳}=\frac{y-۲}{-۱}=\frac{z-۱}{-۲}$

و فقط ۱ توی معادلات فوق صدق می‌کنه.

۶- گزینه‌ی «۱» نقطه‌ی شناور L رو می‌ذاریم توی معادلات L': $P=(t,t-۱,t+۱)\ \Rightarrow\ \frac{t}{۲}=t-۱=\frac{t+۱}{۳}\ \Rightarrow\ t=۲\ \Rightarrow\ P=(۲,۱,۳)$

پس مختصات نقطه‌ی تقاطع به شکل $A=(۲,۱,۳)$ هست و $۲+۱+۳=۶$.

۷- گزینه‌ی «۱» نقطه‌ی $(۱,۱,k)$ روی هر دو خط قرار داره، پس توی معادلات اون‌ها صدق می‌کنه:

$$\begin{cases}A\in L\ \Rightarrow\ \frac{۱}{۲}-\beta=۱-\alpha=k\ \Rightarrow\ \alpha-\beta=\frac{۱}{۲}\\ A\in L'\ \Rightarrow\ ۱-\alpha=۱+\beta=k\ \Rightarrow\ \alpha+\beta=\circ\end{cases}\ \Rightarrow\ \alpha=\frac{۱}{۴},\,\beta=-\frac{۱}{۴}$$

پس حاصل $۲\alpha-\beta$ برابر $\frac{۳}{۴}$ هست.

۸- گزینه‌ی «۲» از گام‌هایی که گفتیم، استفاده می‌کنیم.

گام اول: آیا دو خط موازی‌اند؟ بله چون بردارهای هادی‌شون موازیه.

گام دوم: آیا دو خط منطبق‌اند؟ بله! نقطه‌ی $A=(۲,۱,۳)$ روی هر دو خط قرار داره.

پس دو خط منطبق هستن.

۹- گزینه‌ی «۲» از گام‌هامون استفاده می‌کنیم.

گام اول: آیا دو خط موازی‌اند؟ خیر! چون بردارهای هادی اون‌ها موازی نیست.

گام دوم: آیا دو خط متقاطع‌اند؟

برای پاسخ‌دادن به این سؤال از نقطه‌ی شناور خط اول استفاده می‌کنیم:

$$P=(t,t+۲,-۲t-۱)\Rightarrow \frac{t-۱}{۲}=\frac{(t+۲)-۴}{۳}=\frac{-۲t-۱}{-۱}$$

معادلات فوق در واقع شامل دو معادله‌ی مستقل زیره:

$$\begin{cases}\frac{t-۱}{۲}=\frac{t-۲}{۳}\Rightarrow t=-۱\\ \frac{t-۱}{۲}=\frac{-۲t-۱}{-۱}\Rightarrow t=-۱\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}} t=-۱\Rightarrow$$

دو خط در نقطه‌ی $(-۱,۱,۱-)$ متقاطع هستن.

۱۰- گزینه‌ی «۱» برای این‌که دو خط توی نقطه‌ی $P=(x,y,z)$ متقاطع باشن، باید داشته باشیم: (توجه کنین این شرط، کافی نیست.)

$$\begin{cases}\frac{x-۳}{۱}=-z\\ \frac{x+۱}{۲}=\frac{z}{۲}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+z=۳\\ x-z=-۱\end{cases}\Rightarrow x=۱,\ z=۲$$

حالا مقادیر به دست اومده رو توی معادلات جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases}\frac{x+۱}{۲}=\frac{y-۲}{-۱}=\frac{z}{۲}\\ \frac{x-۳}{۱}=\frac{y+a}{۲}=-z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۱=\frac{y-۲}{-۱}=۱\Rightarrow y=۱\\ -۲=\frac{y+a}{۲}=-۲\xrightarrow{y=۱}-۲=\frac{۱+a}{۲}=-۲\Rightarrow a=-۵\end{cases}$$

از روش نقطه‌ی شناور هم می‌شد استفاده کرد.

۱۱- گزینه‌ی «۴» این تست رو با دو روش، حل می‌کنیم.

روش اول: نقطه‌ی شناور خط $L_۱$ رو پیدا می‌کنیم:

$$P=(t,t+۱,۲t)$$

حالا باید ببینیم در چه صورت، P می‌تونه روی خط $L_۲$ قرار بگیره:

$$\frac{x-۳}{a}=\frac{y}{۱}=\frac{z}{۱}\Rightarrow\frac{t-۳}{a}=\overbrace{t+۱=۲t}^{*}$$

از * داریم: $t=۱$. حالا معادلات رو بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{t-۳}{a}=t+۱=۲t\xrightarrow{t=۱}-\frac{۲}{a}=۲=۲\Rightarrow a=-۱$$

روش دوم: اگر قرار باشه دو خط تو یه نقطه مثل $P=(x,y,z)$، متقاطع بشن، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}x=y-۱=\frac{z}{۲}\\ \frac{x-۳}{a}=y=z\end{cases}$$

وجود جواب برای «دستگاه» بالا، مستلزم وجود جواب برای دو معادله دو مجهول مقابله:

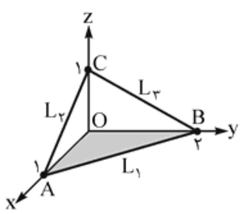
$$\begin{cases}y-۱=\frac{z}{۲}\\ y=z\end{cases}\Rightarrow y=z=۲$$

حالا معادلات دو خط رو بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases}L_۱: x=۲-۱=\frac{۲}{۲}\Rightarrow x=۱\\ L_۲:\frac{x-۳}{a}=۲=۲\end{cases}\Rightarrow L_۲:\frac{۱-۳}{a}=۲=۲\Rightarrow a=-۱$$

۱۲- گزینه‌ی «۲» خطی که به صفحات عمود باشه از نوع (الف) هست و فرمش شبیه به ۴ نیست! پس ۴ پَر!

از طرفی بردار هادی این خط باید به شکل $(۰,۰,k)$ باشد، پس تنها گزینه‌ی مطلوب، ۲ هست.



۱۳- گزینه‌ی «۱» رسم‌کردن خطوط توی تست، خیلی کار رو راحت می‌کنه. با سه خط خاص روبه‌رو هستیم،

نقاط $A=(۱,۰,۰)$، $B=(۰,۲,۰)$ و $C=(۰,۰,۱)$ نقاط تقاطع هستن با توجه به تعامد محورها، داریم:

$$V_{OABC}=\frac{۱}{۳}S_{\overset{\Delta}{OAB}}|\overline{OC}|=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲}|\overline{OA}||\overline{OB}||\overline{OC}|=\frac{۱}{۶}\times۱\times۲\times۱=\frac{۱}{۳}$$

۱۴- گزینه‌ی «۲» از رابطه استفاده می‌کنیم. نقطه‌ی $O=(۰,۰,۰)$ رو به عنوان نقطه‌ی دلخواه از خط انتخاب می‌کنیم: $d=\frac{|\overrightarrow{OA}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}$

از طرفی داریم: $\overrightarrow{OA}\times\vec{u}=(۱,۲,۰)\times(۱,۱,۱)=(۲,-۱,-۱)\Rightarrow|\overrightarrow{OA}\times\vec{u}|=\sqrt{۶}$

پس: $d=\frac{\sqrt{۶}}{\sqrt{۳}}=\sqrt{۲}$

تست: فاصله‌ی نقطه‌ی $A=(۲,۳,۵)$ از خط $x=y+۱=z$ چه‌قدر است؟ *(آزاد ریاضی ۸۹)*

۱) $\frac{\sqrt{۴۲}}{۳}$ ✓ ۲) $\frac{\sqrt{۳۰۶}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۴۰}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۷۸}}{۳}$

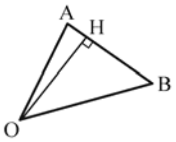
۱۵- گزینه‌ی «۲» **روش اول:** نقطه‌ی $A=(۱,۴,۰)$ ، نقطه‌ای از خط و بردار $\overrightarrow{AB}$ ، بردار هادی خطه:

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(۳,۵,-۲)-(۱,۴,۰)=(۲,۱,-۲)$$

حالا از فرمول استفاده می‌کنیم:

$$d=\frac{|\overrightarrow{OA}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}=\frac{|(۱,۴,۰)\times(۲,۱,-۲)|}{|(۲,۱,-۲)|}=\frac{|(-۸,۲,-۷)|}{|(۲,۱,-۲)|}=\frac{\sqrt{۱۱۷}}{۳}=\sqrt{۱۳}$$

روش دوم: به شکل نگاه کنین:



$$S_{\overset{\Delta}{OAB}}=\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{OH}||\overrightarrow{AB}|=\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|$$

$$\Rightarrow|\overrightarrow{OH}|=\frac{|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{|(۳,۵,-۲)\times(۱,۴,۰)|}{|(۲,۱,-۲)|}=\frac{|(۸,-۲,۷)|}{۳}=\frac{۳\sqrt{۱۳}}{۳}=\sqrt{۱۳}$$

۱۶- گزینه‌ی «۳» این تست رو با دو روش حل می‌کنیم.

روش اول: نقطه‌ی $B=(a,۶,۳)$ روی خط مذکور قرار داره و بردار هادی این خط هم برابر با $(۰,۰,۱)$ هست.

حالا از رابطه استفاده می‌کنیم:

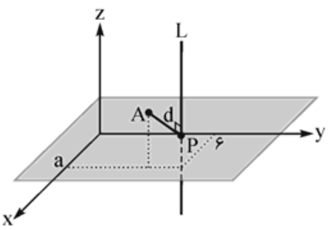
$$d=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}=\frac{|(a-۱,۴,۰)\times(۰,۰,۱)|}{۱}=|(۴,۱-a,۰)|=۵$$

لازم به توان ۲ رسوندن هم نیست، همه می‌دونن که $۵^۲=(\pm۳)^۲+۴^۲$، پس داریم:

$$\begin{cases}۱-a=۳\Rightarrow a=-۲\\ ۱-a=-۳\Rightarrow a=۴\end{cases}$$

که فقط $a=-۲$ توی گزینه‌هاست.

روش دوم: به شکل نگاه کنین:

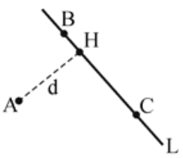


خط L همون خط $y=۶$ و $x=a$ هست و نقطه‌ی A هم مشخص شده. طول پاره‌خط d همون فاصله‌ی A تا خط L هست.

پس فاصله‌ی نقطه تا خط برابر فاصله‌ی نقطه‌ی A تا نقطه‌ی $P=(a,۶,۳)$ میشه.

داریم: $d=\sqrt{(a-۱)^۲+۴^۲+۰^۲}=۵\Rightarrow a=-۲$ یا ۴

۱۷- گزینه‌ی «۱» **روش اول:** طول AH برابر فاصله‌ی نقطه‌ی A تا خط گذرنده از نقاط C و B هست.



معادله‌ی این خط برابر است با: $L:\frac{x-۱}{۲}=\frac{y}{۲}=\frac{z+۱}{۲}\Rightarrow L:x-۱=y=z+۱$

نقطه‌ی $(۱,۰,-۱)$ متعلق به خط و بردار $(۱,۱,۱)$ بردار هادی خط هست. حالا می‌نویسیم:

$$d=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}=\frac{|(۱,۱,-۳)\times(۱,۱,۱)|}{\sqrt{۳}}=\frac{|(۴,-۴,۰)|}{\sqrt{۳}}=\frac{۴\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}=\frac{۴\sqrt{۶}}{۳}$$

روش دوم: $S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AH}||\overrightarrow{BC}|=\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|\Rightarrow|\overrightarrow{AH}|=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{|(۱,۱,-۳)\times(۳,۳,-۱)|}{۲\sqrt{۳}}$

پس: $|\overrightarrow{AH}|=\frac{|(۸,-۸,۰)|}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۸\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۴\sqrt{۶}}{۳}$

۱۸- گزینه‌ی «۲» اولاً دو خط موازین، پس کافیه فاصله‌ی یه نقطه از خط D رو تا خط D' به دست بیاریم.

نقطه‌ی $A=(۱,-۱,۰)$ روی خط D قرار داره. از طرفی نقطه‌ی $B=(۰,۰,۱)$ و بردار $\vec{u'}=(۱,-۱,۲)$ به ترتیب نقطه‌ای دلخواه و بردار هادی خط D' هستن. داریم:

$$d=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\vec{u'}|}{|\vec{u'}|}=\frac{|(-۱,۱,۱)\times(۱,-۱,۲)|}{\sqrt{۶}}=\frac{|(۳,۳,۰)|}{\sqrt{۶}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{\sqrt{۶}}=\sqrt{۳}$$

۱۹- گزینه‌ی «۴» من با نگاه‌کردن به معادله‌ها و بدون محاسبه می‌گم فاصله‌ی اون‌ها $\sqrt{۶}$ هست! ولی توضیحش یه خورده سخته فلذا بی‌خیال می‌شیم!

از راه روتین بهره می‌جوییم!
$A=(۱,۰,۱)\in L \quad , \quad A'=(۳,۰,۳)\in L' \quad , \quad \vec{u}_{L'}=(۱,-۱,۰)$

داریم:
$$d=\frac{|\overrightarrow{AA'}\times\vec{u}_{L'}|}{|\vec{u}_{L'}|}=\frac{|(۲,۰,۲)\times(۱,-۱,۰)|}{\sqrt{۲}}=\frac{|(۲,۲,-۲)|}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۶}$$

۲۰- گزینه‌ی «۲» نقطه‌ی شناور دو خط رو می‌نویسیم: $P=(۲t+۱,t-۱,۳t) \quad , \quad P'=(t',t',t') \Rightarrow \overrightarrow{PP'}=(t'-۲t-۱,t'-t+۱,t'-۳t)$

از طرفی باید داشته باشیم $\overrightarrow{PP'}\cdot\vec{u}=۰$ و $\overrightarrow{PP'}\cdot\vec{u'}=۰$ ($\vec{u}$ و $\vec{u'}$ بردار هادی خطوط هستن.)

$$\begin{cases}\overrightarrow{PP'}\cdot\vec{u}=۰\\ \overrightarrow{PP'}\cdot\vec{u}'=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۶t'-۱۴t=۱ \xrightarrow{t'=۲t} -۲t=۱\\ ۳t'-۶t=۰ \Rightarrow t'=۲t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=\frac{-۱}{۲}\\ t'=-۱\end{cases}\Rightarrow P'=(-۱,-۱,-۱),P=(۰,\frac{-۳}{۲},\frac{-۳}{۲})$$

حالا باید فاصله‌ی نقاط P و P' رو حساب کنیم:
$$|\overrightarrow{PP'}|=\sqrt{۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}}=\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

۲۱- گزینه‌ی «۳» فعلاً چاره‌ای نداریم جز این‌که از نقاط شناور استفاده کنیم:

$$P_۱=(۲,۳,t) \quad , \quad P_۲=(t',۴-t',-۱) \Rightarrow \overrightarrow{P_۱P_۲}:(t'-۲,۱-t',-۱-t)$$

حالا باید ۲ تا معادله رو تشکیل بدیم ($\vec{u}_۱$ و $\vec{u}_۲$ به ترتیب بردارهای هادی خطوط $d_۱$ و $d_۲$).

$$\begin{cases}\overrightarrow{P_۱P_۲}\cdot\vec{u}_۱=۰\\ \overrightarrow{P_۱P_۲}\cdot\vec{u}_۲=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۱-t=۰ \Rightarrow t=-۱ \Rightarrow P_۱=(۲,۳,-۱)\\ t'-۲+t'-۱=۰ \Rightarrow t'=\frac{۳}{۲} \Rightarrow P_۲=(\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۲},-۱)\end{cases}$$

از طرفی خط عمودمشترک از نقاط $P_۱$ و $P_۲$ می‌گذره، پس معادلاتش به شکل روبه‌رو است: $x-۲=y-۳ \quad , \quad z=-۱$

حالا باید ببینیم کدوم گزینه روی خط قرار داره، که فقط ۳ صدق می‌کنه.

۲۲- گزینه‌ی «۲» اگه خط L با بردار هادی $\vec{u}$، با محورهای مختصات زوایای α، β و γ بسازه، بردار هادی $\vec{u}$ برابر میشه با:

$$\vec{e}_u=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

حالا توی مسئله داریم:
$$\vec{e}_u=(\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲},\cos\gamma) \xrightarrow{|\vec{e}_u|=۱} \cos\gamma=۰ \Rightarrow \gamma=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \vec{e}_u=(\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲},۰)$$

از طرفی هر مضربی از بردار $\vec{e}_u$ می‌تونه به عنوان بردار هادی در نظر گرفته بشه، پس بردار $\vec{u}=(۱,۱,۰)$ کاندید مناسبی برای بردار هادی هست.
با بررسی گزینه‌ها متوجه می‌شیم که فقط ۲ این ویژگی رو داره.

۲۳- گزینه‌ی «۲» کسینوس زاویه‌ی بین بردارهای هادی رو پیدا می‌کنیم، با این نکته که باید مواظب بود که این زاویه، کوچک‌ترین باشه.

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}_۱\cdot\vec{u}_۲}{|\vec{u}_۱||\vec{u}_۲|}=\frac{(۲,۱,۲)\cdot(۳,۴,۰)}{۳\times۵}=\frac{۱۰}{۳\times۵}=\frac{۲}{۳}$$

$\cos(\theta)>۰$، پس $\theta<\frac{\pi}{۲}$. بنابراین این زاویه کوچک‌ترین زاویه‌ی ممکنه.