۱- تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ و دنباله‌ی $\{(0/1)^n\}$ را در نظر بگیرید. دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ همگرا به چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۰/۱ ۴) ۰/۰۱

۲- تابع $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$ و دو دنباله‌ی $a_n=1-(0/1)^{n-1}$ و $b_n=1+(0/1)^{n-1}$ را در نظر بگیرید. دنباله‌ی $\{f(a_n)+f(b_n)\}$ به چه عددی همگراست؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۲ ۴) صفر

۳- تابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ و دنباله‌ی $a_n=(-0/1)^n$ مفروض‌اند. کدام گزینه در مورد دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به درستی بیان شده است؟

۱) دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ فقط برای محاسبه‌ی حد راست تابع f در نقطه‌ی صفر استفاده می‌شود.
۲) دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ فقط برای محاسبه‌ی حد چپ تابع f در نقطه‌ی صفر استفاده می‌شود.
۳) دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ هم برای محاسبه‌ی حد راست و هم برای محاسبه‌ی حد چپ تابع f در نقطه‌ی صفر استفاده می‌شود.
۴) دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ واگراست.

۴- تابع $f(x)=\frac{|x|}{x}$ و دنباله‌های $a_n=(0/1)^{n-1}$ و $b_n=-(0/1)^{n-1}$ مفروض‌اند. در مورد دنباله‌ی $\{f(a_n)+f(b_n)\}$ کدام گزینه درست است؟

۱) واگراست. ۲) همگرا به صفر است. ۳) همگرا به ۱− است. ۴) همگرا به ۱ است.

۵- تابع $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ و دنباله‌ی $a_n=\frac{2}{4n+1}$ مفروض‌اند. در مورد دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) واگراست. ۲) همگرا به صفر است. ۳) همگرا به ۱ است. ۴) همگرا به ۱− است.

۶- تابع $f(x)=\cos\frac{1}{x-1}$ و دنباله‌های $a_n=1+\frac{1}{2n\pi}$ ، $b_n=1+\frac{1}{(2n+1)\pi}$ و $c_n=1+\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ مفروض‌اند. $f(a_n)$ ، $f(b_n)$ ، $f(c_n)$ به ترتیب به چه اعدادی همگرایند؟

۱) صفر، ۱، ۱− ۲) ۱، صفر، ۱− ۳) ۱−، ۱، صفر ۴) ۱، ۱−، صفر

۷- کدام گزینه نادرست است؟

۱) تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در صفر دارای حد نامتناهی است.
۲) تابع $f(x)=\frac{1}{x^2}$ در نقطه‌ی $x=0$ دارای حد نامتناهی و یا حد بی‌کران است.
۳) نماد $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ ، یعنی مقادیر $f(x)$ به دلخواه بزرگ و بزرگ‌تر می‌شوند، به شرط آن‌که متغیر x (عضو دامنه‌ی f) به قدر کافی به a نزدیک شود.
۴) تابع $f(x)=-\frac{1}{x^2}$ و دنباله‌ی $a_n=-\frac{1}{n}$ را در نظر می‌گیریم. دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ همگراست.

۸- تعریف $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ ، کدام گزینه است؟

۱) به ازای هر دنباله‌ی $\{x_n\}$ ، $(x_n\neq 0)$ همگرا به صفر، دنباله‌ی $\{f(x_n)\}$ واگرا به $+\infty$ است.
۲) به ازای یک دنباله‌ی $\{x_n\}$ ، $(x_n\neq 0)$ همگرا به صفر، دنباله‌ی $\{f(x_n)\}$ واگرا به $+\infty$ است.
۳) به ازای هر دنباله‌ی $\{x_n\}$ ، $(x_n\neq 0)$ همگرا به صفر، دنباله‌ی $\{f(x_n)\}$ واگراست.
۴) به ازای یک دنباله‌ی $\{x_n\}$ ، $(x_n\neq 0)$ همگرا به صفر، دنباله‌ی $\{f(x_n)\}$ واگراست.

۹- تابع $f(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}$ را به همراه دنباله‌ی $a_n=1+(0/1)^{n-1}$ در نظر بگیرید. نماد $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)$ کدام گزینه را نتیجه می دهد؟

۱) $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-\infty$ ۲) $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=+\infty$ ۳) $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=+\infty$ ۴) $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=-\infty$

۱۰- اگر $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$ باشد کدام دنباله‌ی زیر $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x}{1-x^2}=-\infty$ را توصیف می‌کند؟

۱) $a_n=\frac{n+1}{n}$ ۲) $b_n=\frac{1-n}{n}$ ۳) $c_n=\frac{n-1}{n}$ ۴) $d_n=\frac{n^2+1}{n+2n^2}$

۱۱- کدام گزینه نادرست است؟

۱) نماد $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ یعنی مقادیر $f(x)$ بی‌کران با مقادیر منفی کاهش می‌یابند به شرط آن‌که متغیر x (عضو دامنه‌ی f) به قدر کافی به a نزدیک شود.

۲) نماد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ یعنی می‌توان مقادیر $f(x)$ را به اندازه‌ی دلخواه به L نزدیک کرد به شرط آن‌که x های عضو دامنه‌ی f به قدر کافی کوچک باشند.

۳) تابع $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ و دنباله‌ی $a_n=n$ را در نظر می‌گیریم. دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ همگرا به ۱ است.

۴) تابع $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ و دنباله‌ی $a_n=n^2+1$ را در نظر می‌گیریم. دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ همگرا به ۱ است.

مفهوم ریاضی حد

۱۲- کدام‌یک از دنباله‌های زیر $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{\pi}{x}=0$ را بیان نمی‌کند؟

۱) $a_n=\dfrac{1}{n}$　۲) $b_n=\dfrac{2}{n+1}$　۳) $c_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$　۴) $d_n=\dfrac{n}{n+1}$

۱۳- چند تا از جمله های زیر صحیح است؟

الف) وقتی می نویسیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ ، یعنی هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه‌ی f مانند $\{a_n\}$ که به a همگرا باشد $(a_n\neq a)$، دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به L همگرا است.

ب) حد تابع f در نقطه‌ی a در صورت وجود یکتاست.

ج) اگر n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$. (اگر n عددی زوج باشد $a>0$ است)

د) حد تابع $f(x)=x\sin\dfrac{\pi}{x}$ در صفر، برابر صفر است.

۱) ۴　۲) ۳　۳) ۲　۴) ۱

۱۴- تابع $H(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$ (تابع هوی‌ساید) و دو دنباله‌ی $a_n=\dfrac{1}{2n-1}$ و $b_n=\dfrac{1}{1-2n}$ مفروض‌اند. کدام گزینه در مورد دنباله‌ی $\{2H(a_n)-3H(b_n)\}$ درست است؟

۱) همگرا به صفر است.　۲) همگرا به -1 است.　۳) همگرا به ۲ است.　۴) واگراست.

۱۵- تابع $\operatorname{sgn}(x)=\dfrac{x}{|x|}$ (تابع علامت) و دنباله‌ی $a_n=\dfrac{\cos n\pi}{n^2+1}$ مفروض‌اند. در مورد دنباله‌ی $\{\operatorname{sgn}(a_n)\}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) همگرا به ۱ است.　۲) همگرا به -1 است.　۳) همگرا به صفر است.　۴) واگراست.

۱۶- با فرض این که $f(x)=[x+\frac{1}{3}]+[3x]$ ، دنباله‌ی $\{f(\frac{1}{3}+\frac{1}{n})\}$ به چه عددی همگراست؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) -1　۴) صفر

۱۷- اگر دنباله‌ی $a_n=\dfrac{2n+1}{n+2}$ و تابع $f(x)=(x+1)[x]$ مفروض باشند، آن‌گاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به کدام عدد همگراست؟ *(سراسری ریاضی ۸۳)*

۱) ۲　۲) ۳　۳) ۴　۴) ۶

۱۸- اگر دنباله‌ی $a_n=\dfrac{4n+1}{2n+1}$ و $f(x)=b+[2x]$ باشند، به ازای کدام مقدار b دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به عدد ۱ همگراست؟ *(سراسری ریاضی ۸۵)*

۱) -3　۲) -2　۳) ۱　۴) نشدنی

۱۹- اگر $a_n=\dfrac{n+1}{n}$ و $f(x)=\dfrac{2x+[-x]}{x^2-1}$ باشد، آن‌گاه دنباله‌ی $f(a_n)$ به کدام عدد همگراست؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.) *(سراسری ریاضی ۸۹)*

۱) $\dfrac{1}{2}$　۲) ۱　۳) ۲　۴) همگرا نیست.

۲۰- اگر $a_n=\dfrac{(-1)^n}{2n}$ و $f(x)=|[\frac{x}{2}]|$ باشد، آن‌گاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به کدام عدد همگراست؟ ([ ] علامت جزء صحیح است.) *(خارج از کشور ۸۹)*

۱) صفر　۲) $\dfrac{1}{2}$　۳) ۱　۴) همگرا نیست.

۲۱- اگر $a_n=\dfrac{2n^2+b}{n^2+3n}$ و $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$ باشد، به ازای کدام مقدار b ، دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ همگراست؟ *(خارج از کشور ۸۵)*

۱) ۳　۲) ۶　۳) هر مقدار b　۴) هیچ مقدار b

۲۲- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) حد ندارد ۴) -1

۲۳- حد تابع $f(x)=x$ ، $x\in\mathbb{Q}$ در نقطه‌ی $x=\frac{1}{2}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) صفر ۴) حد ندارد

اثبات عدم وجود حد

۲۴- کدام دو دنباله برای اثبات عدم وجود حد تابع $f(x)=x+[x]$ در نقطه‌ی $x=1$ مناسب‌اند؟

۱) $\{1+\frac{1}{n}\}$ و $\{1-\frac{1}{n}\}$ ۲) $\{1+\frac{1}{n}\}$ و $\{1+\frac{\sqrt{2}}{n}\}$ ۳) $\{\frac{n+2}{n}\}$ و $\{\frac{n+2}{n+1}\}$ ۴) $\{\frac{2n+1}{2n+2}\}$ و $\{\frac{2n-1}{2n+1}\}$

۲۵- کدام دو دنباله برای اثبات عدم وجود حد تابع $f(x)=x[x]$ در نقطه‌ی $x=1$ مناسب‌اند؟

۱) $\{1+\frac{1}{n^2}\}$ و $\{1+\frac{1}{n}\}$ ۲) $\{1-\frac{1}{n^2}\}$ و $\{1-\frac{1}{n}\}$ ۳) $\{2-\frac{1}{n}\}$ و $\{2+\frac{1}{n}\}$ ۴) $\{1-\frac{1}{n^2}\}$ و $\{1+\frac{1}{n}\}$

۲۶- کدام دو دنباله برای اثبات عدم وجود حد تابع $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ در نقطه‌ی صفر مناسب‌اند؟

۱) $\{-\frac{1}{n}\}$ و $\{\frac{1}{n}\}$ ۲) $\{\frac{2}{4n+1}\}$ و $\{\frac{2}{4n-1}\}$ ۳) $\{1-\frac{1}{n}\}$ و $\{1+\frac{1}{n}\}$ ۴) $\{\frac{1}{2n+1}\}$ و $\{\frac{1}{2n-1}\}$

۲۷- برای اثبات عدم وجود حد تابع $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ در نقطه‌ی صفر از دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{\frac{1}{2n\pi}\}$ استفاده کرده‌ایم. دنباله‌ی $\{a_n\}$ کدام است؟

۱) $\{-\frac{1}{2n\pi}\}$ ۲) $\{\frac{-1}{4n\pi}\}$ ۳) $\{\frac{-1}{2n\pi+2\pi}\}$ ۴) $\{\frac{-1}{2n\pi+\pi}\}$

۲۸- کدام دنباله نشان دهنده‌ی آن است که $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ در $x_0=0$ **فاقد** حد است؟

۱) $\{\frac{1}{2n\pi}\}$ ۲) $\{\frac{1}{n\pi}\}$ ۳) $\{\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}\}$ ۴) $\{\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\}$

۲۹- به کمک کدام دنباله‌ی زیر می‌توان ثابت کرد تابع $f(x)=\cos\frac{1}{x-1}$ در نقطه‌ی $x=1$ **فاقد** حد است؟

۱) $\{\frac{1}{n\pi}+1\}$ ۲) $\{\frac{1}{2n\pi}+1\}$ ۳) $\{\frac{1}{(2n+1)\pi}+1\}$ ۴) $\{\frac{1}{(4n+1)\pi}+1\}$

۳۰- کدام دو دنباله برای اثبات عدم وجود حد $f(x)=\begin{cases}x & x\geq 0\\ 1 & x<0\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=0$ مناسب‌اند؟

۱) $\{\frac{-\sqrt{2}}{n^2}\}$ و $\{\frac{-1}{n^2}\}$ ۲) $\{\frac{\sqrt{2}}{n^2}\}$ و $\{\frac{1}{n^2}\}$ ۳) $\{1+\frac{\sqrt{2}}{n^2}\}$ و $\{1-\frac{\sqrt{2}}{n^2}\}$ ۴) $\{\frac{-1}{n^2}\}$ و $\{\frac{1}{n^2}\}$

۳۱- برای اثبات عدم وجود حد تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ x-1 & x>0\end{cases}$ در نقطه‌ی صفر از دو دنباله استفاده کردیم. کدام گزینه برای این منظور مناسب است؟

۱) $\{\frac{-1}{2n+1}\}$ و $\{\frac{-2}{2n+1}\}$ ۲) $\{\frac{n}{n^2+1}\}$ و $\{\frac{n+1}{n^2+2}\}$ ۳) $\{\frac{2n}{2n+1}\}$ و $\{\frac{-1}{n}\}$ ۴) $\{\frac{n}{n^2+1}\}$ و $\{\frac{1-2n}{n^2}\}$

۳۲- به کمک دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{\frac{n-1}{n}\}$ ثابت کرده‌ایم تابع $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}$ در نقطه‌ی $x=1$ **فاقد** حد است. دنباله‌ی $\{a_n\}$ کدام است؟

۱) $\{\frac{2n+1}{2n+2}\}$ ۲) $\{\frac{2n+1}{3n}\}$ ۳) $\{\frac{2n+1}{2n-1}\}$ ۴) $\{\frac{2n+2}{2n+3}\}$

۳۳- به کمک کدام دو دنباله می‌توان ثابت نمود تابع دیریکله با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q}\\ 1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ در هر نقطه‌ی گویا مانند a **فاقد** حد است؟

۱) $\{a+\frac{1}{n}\}$ و $\{a-\frac{1}{n}\}$ ۲) $\{a+\frac{1}{n}\}$ و $\{a+\frac{\sqrt{2}}{n}\}$ ۳) $\{a+\frac{\sqrt{2}}{n}\}$ و $\{a-\frac{\sqrt{2}}{n}\}$ ۴) $\{a+\frac{n}{n+1}\}$ و $\{a+\frac{\sqrt{2}n}{n+1}\}$

۳۴- به کمک کدام دو دنباله می‌توان ثابت نمود تابع دیریکله با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q}\\ 1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ در هر نقطه‌ی گنگ مانند a **فاقد** حد است؟

۱) $\{\frac{[na]}{n}\}$ و $\{a+\frac{2}{n}\}$
۲) $\{a+\frac{1}{n}\}$ و $\{a+\frac{\sqrt{2}}{n}\}$
۳) $\{\frac{[(n+1)a]}{n+1}\}$ و $\{\frac{[na]}{n}\}$
۴) $\{a-\frac{\sqrt{3}}{n}\}$ و $\{a+\frac{\sqrt{3}}{n}\}$

قضایای حد

۳۵- فرض کنیم $f,g:D\to\mathbb{R}$ توابعی باشند که $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$ در این صورت چند تا از جمله‌های زیر صحیح است؟

الف) $\lim\limits_{x\to a}(f\pm g)(x)=L_1\pm L_2$
ب) $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)=L_1L_2$
ج) $\lim\limits_{x\to a}(cf)(x)=cL_1$ (c عددی ثابت است)
د) $\lim\limits_{x\to a}(\frac{f}{g})(x)=\frac{L_1}{L_2}\ ,\ L_2\neq 0$

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۳۶- کدام گزینه قطعاً درست است؟

۱) اگر f و g در x_0 فاقد حد باشند، $f\times g$ در x_0 فاقد حد است.
۲) اگر f و g در x_0 فاقد حد باشند، $f+g$ در x_0 فاقد حد است
۳) اگر f در x_0 فاقد حد و g در x_0 حد داشته باشد، $f-g$ در x_0 فاقد حد است.
۴) اگر f و g در x_0 دارای حد باشند، $\frac{f}{g}$ در x_0 حد دارد.

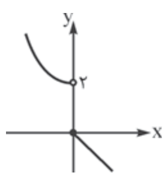
۳۷- در کدام‌یک از حالت‌های زیر تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه‌ی a حتماً حد **ندارد**؟

۱) تابع g در a حد داشته باشد ولی تابع f در a حد نداشته باشد.
۲) تابع f و g هر دو در a حد نداشته باشند.
۳) تابع f در a حد داشته باشد ولی تابع g در a حد نداشته باشد.
۴) تابع f در یک همسایگی محذوف a کران‌دار باشد و تابع g در a حد نداشته باشد.

۳۸- اگر $f(x)=\frac{1}{x+1}$ و $g(x)=\frac{4x+3}{x+1}$، آن‌گاه تابع $f+g$ در نقطه‌ی $x=-1$ چگونه است؟

۱) حد دارد، ولی مقدار ندارد.
۲) حد ندارد، اما مقدار دارد.
۳) نه حد دارد و نه مقدار.
۴) حد و مقدار دارد.

۳۹- نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است. با کدام فرض تابع $f.g$ در نقطه‌ی صفر حد دارد؟



۱) $g(x)=\cos^2 x$
۲) $g(x)=\begin{cases}\cos x & x>0\\ 2\sin x & x<0\end{cases}$
۳) $g(x)=\begin{cases}1-x & x\geq 0\\ 1+x & x<0\end{cases}$
۴) $g(x)=\begin{cases}2\sin x & x>0\\ \cos x & x<0\end{cases}$

۴۰- حد تابع $y=\frac{\sin^2 x+2\cos x}{2\sin^2 x-\cos x}$ وقتی $x\to -\frac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱) -2
۲) 2
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $-\frac{1}{2}$

۴۱- کدام گزینه **نادرست** است؟

۱) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\frac{x-2}{3x^2-2}}=\frac{1}{5}$
۲) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt[3]{\frac{x-6}{x^2+2}}=-\frac{1}{3}$
۳) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[4]{\frac{x+15}{2x^2-1}}=2$
۴) $\lim\limits_{x\to -1}(\frac{x+5}{3x^3+2})^3=64$

۴۲- کدام‌یک از توابع زیر در دامنه‌ی تعریف خود کران‌دار **نیست**؟

۱) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$
۲) $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$
۳) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$
۴) $f(x)=\sin x+\cos x$

۴۳- کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ اگر و تنها اگر $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-\ell)=0$.

۲) هرگاه به ازای هر x در بازه‌ی بازی شامل a (به‌جز احتمالاً در خود a)، $h(x)\le f(x)\le g(x)$ و نیز $\lim\limits_{x\to a} h(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\ell$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$.

۳) تابع f را بر مجموعه‌ی A کران‌دار گوییم هرگاه عدد مثبتی مانند M یافت شود به طوری که برای هر $x\in A$، $|f(x)|\le M$.

۴) اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ و تابع g در یک همسایگی محذوف a کران‌دار باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=\ell$.

۴۴- اگر به ازای هر x در بازه‌ی $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$، داشته باشیم: $3-\cos^2 x\le f(x)\le 2+x^2$، حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۱

۴۵- اگر به ازای هر $x\neq 0$ داشته باشیم: $3-x^2\le f(x)\le 3+x^2$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2f(x)-3}{f(x)+1}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) ۳

۴۶- اگر $\sin x\le xf(x)\le x^2+x$ باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3f(x)+2}{f(x)}$ کدام است؟ $(x\neq 0)$

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) صفر

۴۷- حاصل $\lim\limits_{x\to 0} x[\frac{2}{x}]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) حد ندارد

۴۸- حاصل $\lim\limits_{x\to 0} x([\frac{1}{x}]-\cos\frac{1}{x})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) وجود ندارد

۴۹- تابع دیریکله با ضابطه‌ی $D(x)=\begin{cases}1 & x\ \text{گویا}\\ 0 & x\ \text{گنگ}\end{cases}$ مفروض است. کدام گزینه حاصلی برابر صفر دارد؟

۱) $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)D(x)$ ۲) $\lim\limits_{x\to 0}(x-1)D(x)$ ۳) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)D(x)$ ۴) $\lim\limits_{x\to 1} xD(x)$

۵۰- اگر f تابعی کران‌دار باشد به طوری که در هیچ نقطه‌ای حد نداشته باشد، در این صورت کدام‌یک از توابع زیر دقیقاً در دو نقطه حد دارند؟ $(D_f=\mathbb{R})$

۱) $y=(x^3-4x)f(x)$ ۲) $y=(x-\sqrt{x})f(x)$ ۳) $y=(x^2+1)f(x)$ ۴) $y=(x-1)(x^2-2x+1)f(x)$

۵۱- اگر f در هیچ نقطه‌ای حد نداشته و همواره $4\le|f(x)|$ باشد، در این صورت تابع $g(x)=([x]+[-x])f(x)$ و $h(x)=(x^3-x)f(x)$ دقیقاً در چه نقاطی حد دارند؟

۱) g در کل $\mathbb{Z}$ و h در $\{-1,1,0\}$ حد دارد.

۲) g در $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ و h در $\{-1,1,0\}$ حد دارد.

۳) g در هیچ نقطه‌ای حد ندارد و h در $\{-1,1,0\}$ حد دارد.

۴) f و g هر دو در هیچ نقطه‌ای حد ندارند.

۵۲- چند تا از حدهای زیر درست محاسبه شده اند؟

$\lim\limits_{x\to 0}|x|\tan\frac{1}{x}=0$ ، $\lim\limits_{x\to 0} x^2[x]=0$ ، $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2\sin\frac{1}{x-1}=0$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حدهای یک‌طرفه

۵۳- کدام گزینه تعریف $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\ell$ را به درستی بیان کرده است؟

۱) هرگاه به ازای یک دنباله از عضوهای دامنه‌ی f مانند $\{a_n\}$ که به a همگراست و $a_n<a$ داشته باشیم $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=\ell$.

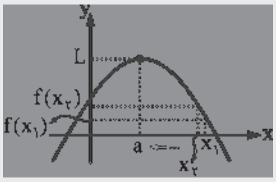
۲) هرگاه به ازای هر دنباله از عضوهای دامنه‌ی f مانند $\{a_n\}$ که به a همگراست و $a_n<a$ داشته باشیم $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=\ell$.

۳) هرگاه به ازای هر دنباله از عضوهای دامنه‌ی f مانند $\{a_n\}$ که به a همگراست و $a_n>a$ داشته باشیم $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=\ell$.

۴) هرگاه به ازای یک دنباله از عضوهای دامنه‌ی f مانند $\{a_n\}$ که به a همگراست و $a_n>a$ داشته باشیم $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=\ell$.

پاسخ‌های تشریحی
فصل سوم

۱- گزینه‌ی «۱» مفهوم و فرایند حد



فرض کنید D دامنه‌ی تابع f و $D\subset\mathbb{R}$ باشد. اگر x (عضو D) به عدد a میل کند (نزدیک شود) و $f(x)$ به L میل کند آن‌گاه می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و می‌خوانیم «حد $f(x)$ وقتی x به a میل می‌کند برابر L است.»

توجه داشته باشید که باید x از چپ و راست به a نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L \ \text{(حد راست)}\\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L \ \text{(حد چپ)}\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=L$$

یعنی شرط وجود حد، برابری و وجود حد چپ و راست است.

توصیف حد تابع $y=f(x)$ در $x=a$ به صورت یک دنباله بیان می‌شود. نمودار f را مشاهده کنید. دنباله‌ی دلخواه $\{x_n\}$ را در نظر بگیرید که همگرا به a باشد، مقدار $f(x_۱)$ و $f(x_۲)$ و ... روی نمودار همان مقادیر دنباله‌ی $\{f(x_n)\}$ است که به L همگراست.

مثلاً تابع $y=x^۲$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از راست به عدد $x=۲$ نزدیک شویم. برای این منظور دنباله‌ی $a_n=۲+\frac{۱}{n}$ را در نظر می‌گیریم که به (۲) همگراست. (در فصل قبل گفته شده) چون دنباله‌ی $\{f(x_n)\}$ یعنی $\{(۲+\frac{۱}{n})^۲\}$ به عدد ۴ همگراست، پس: $\lim\limits_{x\to ۲} x^۲=۴$

دنباله‌ی $(۰/۱)^n$ به صفر همگراست (جملاتش به صفر نزدیک می‌شود) $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{\sin x}{x}=۱$

۲- گزینه‌ی «۲»

چون دنباله‌های a_n و b_n هر دو به یک همگرایند، پس:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x^۳-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}(x^۲+x+۱)=۳$$

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n)=\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۳-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}(x^۲+x+۱)=۳$$

پس:

$$\lim_{n\to\infty}(f(a_n)+f(b_n))=\lim_{x\to ۱^-} f(x)+\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۳+۳=۶$$

۳- گزینه‌ی «۳»

می‌دانیم: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=۰$ و $a_n=\begin{cases}(۰/۱)^n & n \text{ زوج}\\ -(۰/۱)^n & n \text{ فرد}\end{cases}$.

پس برای هر n زوج دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ حد راست تابع f در نقطه‌ی صفر را محاسبه می‌کند.

یعنی:

$$n \text{ زوج}: \lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x}{\sqrt{x+۱}-۱}\left(=\frac{۰}{۰}\right)\times\frac{\sqrt{x+۱}+۱}{\sqrt{x+۱}+۱}=\lim_{x\to ۰^+}(\sqrt{x+۱}+۱)=۲$$

اما برای هر n فرد دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ حد چپ تابع f در نقطه‌ی صفر را محاسبه می‌کند. یعنی:

$$n \text{ فرد}: \lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x}{\sqrt{x+۱}-۱}\left(=\frac{۰}{۰}\right)\times\frac{\sqrt{x+۱}+۱}{\sqrt{x+۱}+۱}=\lim_{x\to ۰^-}(\sqrt{x+۱}+۱)=۲$$

بنابراین: $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۲$ و در واقع دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ نیز همگرا به ۲ است.

۴- گزینه‌ی «۲» جملات دنباله‌ی $\{a_n\}$ مثبت و جملات دنباله‌ی $\{b_n\}$ منفی‌اند پس:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x}{x}=۱ \quad , \quad \lim_{n\to\infty} f(b_n)=\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to ۰^-}-\frac{x}{x}=-۱$$

بدین ترتیب: $\lim_{n\to\infty}(f(a_n)+f(b_n))=۰$

۵- گزینه‌ی «۳»

$$f(a_n)=\sin(\frac{\frac{\pi}{۲}}{\frac{}{۴n+۱}})=\sin(\frac{(۴n+۱)\pi}{۲})=\sin(۲n\pi+\frac{\pi}{۲})=۱$$

یعنی دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ دنباله‌ی ثابت ۱ است. پس همگرا به ۱ است.

۶- گزینه‌ی «۴»

$$f(a_n)=\cos\frac{۱}{\frac{۱}{۲n\pi}+۱-۱}=\cos ۲n\pi=۱$$

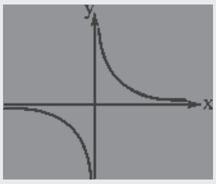
$$f(b_n)=\cos\frac{۱}{\frac{۱}{۲n\pi+\pi}+۱-۱}=\cos(۲n\pi+\pi)=\cos\pi=-۱$$

$$f(c_n)=\cos\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۲n\pi+\frac{\pi}{۲}}-۱}=\cos(۲n\pi+\frac{\pi}{۲})=\cos\frac{\pi}{۲}=۰$$

۷- گزینه‌ی «۴»

مفهوم حد بی‌نهایت

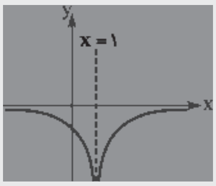
اگر متغیر x (عضو دامنه‌ی f) به قدر کافی به a نزدیک شود و $f(x)$ به اندازه‌ی دلخواه بزرگ و بزرگ‌تر شود در این صورت می‌نویسیم $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$. به زبان دنباله‌ها این وقتی اتفاق می‌افتد که برای هر دنباله‌ی $\{a_n\}$ با مقادیر عضو دامنه‌ی f که $a_n\to a$، $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=\pm\infty$ شود. در این حالت گوییم f در a دارای حد نامتناهی است.



مثلاً تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در نظر بگیرید که دامنه‌ی آن $\mathbb{R}-\{۰\}$ است و نمودار آن را قبلاً دیده‌اید.

روی نمودار واضح است که اگر x از راست به صفر نزدیک شود مقادیر تابع به مقدار دلخواه بزرگ می‌شوند.

حالا دنباله‌ی $a_n=\frac{۱}{n}$ (که حد آن ۰^+ است) و $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در نظر بگیرید. واضح است که $f(a_n)=f(\frac{۱}{n})=n$ و $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=+\infty$. در این حالت گوییم f در صفر دارای حد نامتناهی است.



یک مثال دیگر: تابع $f(x)=\frac{-۱}{(x-۱)^۲}$ را در مجاورت $x=۱$ در نظر بگیرید.

۱ و ۲ و ۳ صحیح هستند. اما در ۴ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty}-\frac{۱}{(-\frac{۱}{n})^۲}=\lim_{n\to\infty}(-n^۲)=-\infty$$

یعنی دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ واگرا به $-\infty$ است.

۸- گزینه‌ی «۱»

$$\lim_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty}(۱+(۰/۱)^{n-۱})=۱+۰^+=۱$$

۹- گزینه‌ی «۴»

چون جملات دنباله‌ی $\{a_n\}$ از مقادیر بزرگ‌تر از یک به آن نزدیک می‌شوند، پس:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{x\to ۱^+} f(x)=-\infty$$

۱۰- گزینه‌ی «۱» دنباله‌ای صحیح است که حد آن برابر ۱ باشد و از مقادیر بیشتر از یک به عدد یک نزدیک شود.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1 \quad \text{و} \quad a_n = 1+\frac{1}{n} > 1$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -1 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} d_n = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} c_n = 1$$

$$c_n = \frac{n-1}{n} = 1-\frac{1}{n} < 1$$

۱۱- گزینه‌ی «۲»

مفهوم حد در بی‌نهایت

اگر x (عضو دامنه‌ی f) به اندازه‌ی دلخواه بزرگ شود. (به صورت بی‌کران افزایش یابد) و $f(x)$ به عدد L نزدیک شود و فاصله‌ی f از L به اندازه‌ی کافی کوچک شود آن‌گاه گوییم حد f وقتی x به سمت ∞ میل می‌کند برابر L است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

به زبان دنباله‌ها اگر برای هر دنباله‌ی $\{a_n\}$ که واگرا به $+\infty$ باشد و $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$ باشد آن‌گاه $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ است.

مثلاً دنباله‌ی $a_n = n^2$ و تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ را در نظر بگیرید. دنباله‌ی a_n واگرا به $+\infty$ است زیرا $\lim_{n\to\infty}(n^2) = \infty$ از طرفی $f(a_n) = \frac{2n^2-1}{n^2+2}$ و $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 2$ در نتیجه $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$ خواهد بود.

اگر x از دامنه‌ی f به اندازه‌ی دلخواه به صورت بی‌کران کاهش یابد و $f(x)$ به عدد L نزدیک شود آن‌گاه گوییم حد f وقتی x به سمت $-\infty$ میل می‌کند برابر L است و می‌نویسیم: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$

می‌توان جمله‌ی صحیح این گزینه را به صورت زیر بیان نمود:

«نماد $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ یعنی می‌توان مقادیر $f(x)$ را به اندازه‌ی دلخواه به L نزدیک کرد به شرط آن‌که xهای عضو دامنه‌ی f به قدر کافی بزرگ باشند.»

۱۲- گزینه‌ی «۴»

مفهوم ریاضی حد

هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه‌ی f مانند $\{a_n\}$ که به a همگراست $(a_n \neq a)$، دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به L همگرا باشد آن‌گاه گوییم حد تابع f در a، عدد حقیقی L است و می‌نویسیم: $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

توجه داشته باشید که حد دنباله‌ی $\{a_n\}$ در صورت وجود یکتاست و حد f در نقطه‌ی a نیز در صورت وجود یکتاست.

توضیح بیشتر: هدف محاسبه‌ی $\lim_{x\to a} f(x)$ است. اگر به ازای همه‌ی دنباله‌هایی مثل a_n که به a میل می کنند $(a_n \neq a)$ داشته باشیم که دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به L میل می‌کند آن‌گاه $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

مثلاً در محاسبه‌ی $\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}$، می‌دانیم که $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ در $x=3$ تعریف نمی‌شود و برای هر $x \neq 3$ داریم:

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$$

هرگاه دنباله‌ی $\{a_n\}$ که $a_n \neq 3$ و به ۳ همگرا باشد آن‌گاه:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n+3) = 3+3 = 6 \Rightarrow \lim_{x\to3} f(x) = 6$$

$f(x) = x\sin\frac{\pi}{x}$ در $x=0$ تعریف نمی‌شود. دنباله‌ای که جملاتش صفر نباشند اما دارای حد صفر باشد می‌تواند وجود حد تابع f را توصیف کند.

$$a_n = \frac{1}{n} \neq 0\ ,\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0\ ,\ f(a_n) = \frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\sin(\pi n) = 0$$

$$b_n = \frac{2}{n+1} \neq 0\ ,\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0\ ,\ f(b_n) = \frac{2}{n+1}\sin\frac{\pi}{\frac{2}{n+1}} = \frac{2}{n+1}\sin\frac{\pi}{2}(n+1) = \frac{2}{n+1}\cos(\frac{n\pi}{2})$$

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}\cos(\frac{n\pi}{2}) = 0$$

$$c_n=\frac{(-1)^n}{n}\neq 0\ ,\ \lim_{n\to\infty}c_n=0\ ,\ f(c_n)=\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{\pi}{\frac{(-1)^n}{n}}=\frac{(-1)^n}{n}\sin((-1)^n n\pi)=0$$

اما $d_n=\frac{n}{n+1}$ نمی‌تواند حد مذکور را توصیف کند، چون: $\lim_{n\to\infty}d_n=1$

۱۳- گزینه‌ی «۱» هر چهار جمله صحیح است.

۱۴- گزینه‌ی «۳» دنباله‌ی $\{a_n\}$ همگرا به صفر با جملات مثبت است. بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}H(a_n)=\lim_{t\to 0^+}H(t)=\lim_{t\to 0^+}1=1$$

دنباله‌ی $\{b_n\}$ همگرا به صفر با جملات منفی است. یعنی:

$$\lim_{n\to\infty}H(b_n)=\lim_{t\to 0^-}H(t)=\lim_{t\to 0^-}0=0$$

و بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}(2H(a_n)-3H(b_n))=2(1)-3(0)=2$$

۱۵- گزینه‌ی «۴» دنباله‌ی $\{a_n\}$ را می‌توان به صورت $a_n=\begin{cases}\frac{-1}{n^2+1} & \text{فرد } n\\ \frac{1}{n^2+1} & \text{زوج } n\end{cases}$ تعریف نمود. این دنباله همگرا به صفر است ولی در شاخه‌ی فرد، جملات منفی و در شاخه‌ی زوج، جملات مثبت هستند. یعنی:

$$\text{فرد } n:\ \lim_{n\to\infty}\operatorname{sgn}(a_n)=\lim_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}(x)=-1$$

$$\text{زوج } n:\ \lim_{n\to\infty}\operatorname{sgn}(a_n)=\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sgn}(x)=1$$

بدین ترتیب دنباله‌ی $\{\operatorname{sgn}(a_n)\}$ واگراست.

۱۶- گزینه‌ی «۱» دنباله‌ی $\{\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\}$ همگرا به $\frac{1}{3}$ است. ولی از مقادیر بزرگ‌تر از $\frac{1}{3}$ به $\frac{1}{3}$ نزدیک می‌شود. بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}f(\frac{1}{3}+\frac{1}{n})=\lim_{x\to\frac{1}{3}^+}f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{3}^+}([x+\frac{1}{3}]+[3x])=[\frac{2}{3}^+]+[1^+]=0+1=1$$

۱۷- گزینه‌ی «۲» دنباله‌ی $a_n=\frac{2n+1}{n+2}$ همگرا به ۲ و صعودی است. پس به ازای هر n، $1\le a_n<2$. بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x+1)[x]=\lim_{x\to 2^-}(x+1)=3$$

۱۸- گزینه‌ی «۲» دنباله‌ی $a_n=\frac{4n+1}{2n+1}$ همگرا به ۲ و صعودی است. یعنی همه‌ی جملات آن بین جمله‌ی اول و حد دنباله قرار دارد. پس برای هر n طبیعی، $\frac{5}{3}\le a_n<2$. بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(b+[2x])=b+[4^-]=b+3$$

از طرفی حاصل حد باید برابر ۱ باشد:

$$b+3=1\Rightarrow b=-2$$

۱۹- گزینه‌ی «۲» دنباله‌ی $a_n=\frac{n+1}{n}$ همگرا به ۱ و نزولی است. پس همه‌ی جملات دنباله بین جمله‌ی اول و حد دنباله قرار دارد. یعنی برای هر n طبیعی داریم $1<a_n\le 2$. بدین ترتیب:

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x+[-x]}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2}{x+1}=1$$

۲۰- گزینه‌ی «۴» می دانیم:

$$a_n=\frac{(-1)^n}{2n}=\begin{cases}\frac{-1}{2n} & \text{فرد } n\\ \frac{1}{2n} & \text{زوج } n\end{cases}$$

پس:

$$\text{فرد } n:\ \lim_{n\to\infty}a_n=0^-\quad \text{و}\quad \text{زوج } n:\ \lim_{n\to\infty}a_n=0^+$$

بدین ترتیب برای n طبیعی فرد داریم:

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=|[0^-]|=|-1|=1$$

و برای n طبیعی زوج داریم:

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=|[0^+]|=0$$

یعنی دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ همگرا نیست.

۲۱- گزینه‌ی «۴» ابتدا دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{x^{۲}-x-۲}$ را می‌یابیم.

$$x^{۲}-x-۲\geq ۰ \Rightarrow x\leq -۱ \text{ یا } x\geq ۲ \Rightarrow D_f=(-\infty,-۱]\cup[۲,+\infty)$$

بدین ترتیب تابع f در نقطه‌ی $x=۲$ از سمت راست دارای حد است. از طرفی دنباله‌ی $\{a_n\}$ همگرا به ۲ است. حال باید بررسی کنیم این دنباله از سمت مقادیر بیشتر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شود یا از سمت مقادیر کم‌تر از ۲، برای این منظور $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-۲)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-۲)=\lim_{n\to\infty}(\frac{۲n^{۲}+b}{n^{۲}+۳n}-۲)=\lim_{n\to\infty}\frac{۲n^{۲}+b-۲n^{۲}-۶n}{n^{۲}+۳n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b-۶n}{n^{۲}+۳n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-۶n}{n^{۲}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-۶}{n}=۰^-$$

یعنی $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-۲)<۰$ بنابراین: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=۲^-$

در حقیقت: $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=\lim\limits_{x\to ۲^-}f(x)=$ وجود ندارد

بنابر مطالب ذکرشده به ازای هیچ مقدار b دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ همگرا نخواهد بود.

۲۲- گزینه‌ی «۱» دامنه‌ی تابع را حساب می‌کنیم.

$$\sin\frac{۱}{x}=۰ \Rightarrow \frac{۱}{x}=k\pi \Rightarrow x=\frac{۱}{k\pi} \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{x\mid x=\frac{۱}{k\pi},k\in\mathbb{Z}\}$$

هر دنباله از دامنه تابع که به صفر همگرا باشد مانند $a_n=\frac{۱}{n}$ یا $b_n=\frac{۱}{۲n\pi+\frac{\pi}{۲}}$ یا ... می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

$$f(a_n)=\frac{\sin n}{\sin n}=۱ \quad , \quad f(b_n)=\frac{\sin\frac{\pi}{۲}}{\sin\frac{\pi}{۲}}=۱$$

توجه کنید که دنباله‌هایی نظیر $a_n=\frac{۱}{n\pi}$ یا $b_n=\frac{۱}{۲n\pi}$ در دامنه‌ی f قرار ندارند.

۲۳- گزینه‌ی «۱» دامنه‌ی تابع f مجموعه‌ی اعداد گویا است. پس دنباله‌ی a_n باید طوری انتخاب شود که اولاً به $\frac{۱}{۲}$ همگرا باشند ثانیاً جملاتش گویا باشد. به ازای هر دنباله با این شرایط مثل دنباله‌ی $a_n=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{n}$، $f(a_n)=a_n$. پس:

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{n})=\frac{۱}{۲}$$

۲۴- گزینه‌ی «۱»

اثبات عدم وجود حد

اگر دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ $(b_n\neq a, a_n\neq a)$ هر دو به a همگرا باشند اما دنباله‌های $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به دو عدد متمایز همگرا باشند آن‌گاه تابع $f(x)$ در $x=a$ حد ندارد.

به عنوان مثال تابع $f(x)=\cos\frac{۱}{x}$ را در نظر بگیرید. دنباله‌های $a_n=\frac{۱}{۲n\pi+\frac{\pi}{۲}}$ و $b_n=\frac{۱}{۲n\pi+\frac{\pi}{۳}}$ هر دو به صفر همگرایند.

$$f(a_n)=f(\frac{۱}{۲n\pi+\frac{\pi}{۲}})=\cos(۲n\pi+\frac{\pi}{۲})=\cos(\frac{\pi}{۲})=۰$$

$$f(b_n)=f(\frac{۱}{۲n\pi+\frac{\pi}{۳}})=\cos(۲n\pi+\frac{\pi}{۳})=\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}$$

چون دنباله‌های $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به دو عدد متمایز همگرایند پس $\cos\frac{۱}{x}$ در صفر حد ندارد.

در **۱** داریم:

$$\lim_{n\to\infty}f(۱+\frac{۱}{n})=\lim_{x\to ۱^+}f(x)=۲$$

$$\lim_{n\to\infty}f(۱-\frac{۱}{n})=\lim_{x\to ۱^-}f(x)=۱$$

یعنی تابع f در $x=۱$ حد ندارد.

در **۲** هر دو دنباله حد راست تابع f در نقطه‌ی $x=۱$ را توصیف می‌کند.

در ۳ هر دو دنباله حد راست تابع f در نقطه‌ی $x=1$ را توصیف می‌کند.

در ۴ هر دو دنباله حد چپ تابع f در نقطه‌ی $x=1$ را توصیف می‌کند.

در واقع دنباله‌هایی مناسبند که حدهایشان برابر ۱ باشد ولی مقادیر یکی بیشتر و یکی کم‌تر از ۱ باشند.

۲۵- گزینه‌ی «۴» در ابتدا باید همه‌ی دنباله‌ها به نقطه $x=1$ همگرا باشند. ۳ به دلیل همگرا بودن به عدد ۲ مردود است. اما نقطه‌ی ضعف تابع در نقطه‌ی $x=1$ حد چپ و راست نابرابر است. بدین ترتیب تنها گزینه‌ای که هر دو حد چپ و راست نقطه‌ی $x=1$ را بیان می‌کند، ۴ است. یعنی:

$$\lim_{n\to\infty} f(1-\frac{1}{n^2})=\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-} x[x]=0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} f(1+\frac{1}{n})=\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+} x[x]=1$$

پس اثبات عدم وجود حد تابع در نقطه‌ی $x=1$ به کمک دنباله‌های ۴ امکان‌پذیر است.

۲۶- گزینه‌ی «۲» در ۱ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} f(-\frac{1}{n})=\lim_{n\to\infty}(\sin(\frac{\pi}{\frac{-1}{n}}))=\lim_{n\to\infty}\sin(-n\pi)=0$$

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n})=\lim_{n\to\infty}(\sin(\frac{\pi}{\frac{1}{n}}))=\lim_{n\to\infty}\sin(n\pi)=0$$

یعنی ۱ مناسب نیست.

در ۲ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{2}{4n+1})=\lim_{n\to\infty}(\sin(\frac{4n+1}{2})\pi)=\lim_{n\to\infty} 1=1$$

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{2}{4n-1})=\lim_{n\to\infty}(\sin(\frac{4n-1}{2})\pi)=\lim_{n\to\infty} -1=-1$$

بدین ترتیب به کمک این دو دنباله اثبات کردیم تابع f در نقطه‌ی صفر حد ندارد.

در ۳ دنباله‌ها همگرا به ۱ هستند.

در ۴ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{2n+1})=\lim_{n\to\infty}(\sin(2n+1)\pi)=0$$

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{2n-1})=\lim_{n\to\infty}(\sin(2n-1)\pi)=0$$

پس این گزینه نیز مناسب برای اثبات عدم وجود حد تابع f در نقطه‌ی صفر نیست.

۲۷- گزینه‌ی «۴» می‌دانیم:

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{2n\pi})=\lim_{n\to\infty}\cos(2n\pi)=\lim_{n\to\infty} 1=1$$

حال گزینه‌ی را انتخاب می‌کنیم که در آن دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به یک همگرا نباشد، تا عدم وجود حد تابع f در نقطه‌ی صفر اثبات شود.

در ۱ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty} f(-\frac{1}{2n\pi})=\lim_{n\to\infty}\cos(-2n\pi)=\lim_{n\to\infty} 1=1$$

در ۲ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty} f(-\frac{1}{4n\pi})=\lim_{n\to\infty}\cos(-4n\pi)=\lim_{n\to\infty} 1=1$$

در ۳ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty} f(\frac{-1}{2n\pi+2\pi})=\lim_{n\to\infty}\cos(2n\pi+2\pi)=\lim_{n\to\infty} 1=1$$

در ۴ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty} f(\frac{-1}{2n\pi+\pi})=\lim_{n\to\infty}\cos(2n\pi+\pi)=\lim_{n\to\infty}(-1)=-1$$

۲۸- گزینه‌ی «۳»

اثبات عدم وجود حد به کمک یک دنباله

اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$، $a_n\neq a$ به a همگرا باشد ولی دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ واگرا باشد در این صورت $f(x)$ در $x=a$ حد ندارد.

در ۱ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{2n\pi})=\lim_{n\to\infty}\sin(2n\pi)=\lim_{n\to\infty} 0=0$$

در ۲ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n\pi})=\lim_{n\to\infty}\sin(n\pi)=\lim_{n\to\infty} 0=0$$

در ۳ داریم: $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{۱}{n\pi+\frac{\pi}{۲}})=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n\pi+\frac{\pi}{۲})=$ وجود ندارد

در ۴ داریم: $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{۱}{۲n\pi+\frac{\pi}{۲}})=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(۲n\pi+\frac{\pi}{۲})=\lim\limits_{n\to\infty}۱=۱$

بنابراین ۳ عدم وجود حد تابع f در نقطه‌ی $x=۰$ را بیان می‌کند.

۲۹- گزینه‌ی «۱» در ابتدا با بررسی گزینه‌ها در می‌یابیم همه‌ی آن‌ها همگرا به ۱ هستند. بنابراین فقط با جای‌گذاری دنباله‌ها در تابع می‌توان به گزینه‌ی موردنظر دست یافت.

در ۱ داریم: $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{۱}{n\pi}+۱)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\frac{۱}{\frac{۱}{n\pi}+۱-۱})=\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n\pi)=\lim\limits_{n\to\infty}(-۱)^n$

بدیهی است دنباله‌ی $\{\cos n\pi\}$ یا همان $\{(-۱)^n\}$ دنباله‌ای واگراست. پس این گزینه برای اثبات عدم وجود حد تابع f در نقطه‌ی $x=۱$ مناسب است.

در ۲ داریم: $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{۱}{۲n\pi}+۱)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\frac{۱}{\frac{۱}{۲n\pi}+۱-۱})=\lim\limits_{n\to\infty}\cos(۲n\pi)=\lim\limits_{n\to\infty}۱=۱$

در ۳ داریم: $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{۱}{(۲n+۱)\pi}+۱)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos((۲n+۱)\pi)=\lim\limits_{n\to\infty}(-۱)=-۱$

در ۴ داریم: $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{۱}{(۴n+۱)\pi}+۱)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos((۴n+۱)\pi)=\lim\limits_{n\to\infty}(-۱)=-۱$

۳۰- گزینه‌ی «۴» در ابتدا باید همه‌ی دنباله‌ها به سمت صفر میل کنند. در صورتی که ۳ همگرا به یک و در نتیجه مردود است. تابع f به این دلیل در نقطه صفر فاقد حد است که حد چپ و راست نابرابر دارد. بنابراین گزینه‌ای را انتخاب می‌کنیم که به همین موضوع اشاره کند. در ۱ هر دو دنباله از مقادیر منفی به صفر نزدیک می‌شوند. در ۲ هر دو دنباله از مقادیر مثبت به صفر نزدیک می‌شوند. اما در ۴ یکی از مقادیر مثبت و دیگری از مقادیر منفی به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین ۴ صحیح است.

۳۱- گزینه‌ی «۴» تابع f به دلیل نابرابری حدهای چپ و راست در نقطه‌ی صفر، دارای حد نیست. پس باید گزینه‌ای انتخاب شود که اولاً هر دو دنباله همگرا به صفر باشد. ثانیاً یکی از مقادیر کوچک‌تر از صفر و دیگری از مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر نزدیک شود.

در ۱ هر دو دنباله دارای جملات منفی و همگرا به صفر هستند. پس برای اثبات عدم وجود حد تابع نامناسب می باشند.

در ۲ هر دو دنباله دارای جملات مثبت و همگرا به صفر هستند. پس برای اثبات عدم وجود حد تابع نامناسب می باشند.

در ۳ یکی از دنباله‌ها به عدد ۱ همگراست. پس مناسب اثبات عدم وجود حد تابع در نقطه‌ی صفر نیست.

اما در ۴ هر دو دنباله همگرا به صفر هستند و پس از جاگذاری در تابع خواهیم داشت:

$$\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{n}{n^۲+۱})=\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=\lim\limits_{n\to ۰^+}(x-۱)=-۱\quad,\quad \lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{۱-۲n}{n^۲})=\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-} x^۲=۰$$

بنابراین به کمک دنباله‌های موجود در ۴ اثبات نمودیم تابع f در نقطه‌ی صفر فاقد حد است.

۳۲- گزینه‌ی «۳» دنباله $\{\frac{n-۱}{n}\}$ همگرا به ۱ است ولی از مقادیر کوچک‌تر از یک به یک میل می‌کند.

$$\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{n-۱}{n})=\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{|x-۱|}{x-۱}=-۱$$

حال باید دنباله‌ای انتخاب کنیم که از سمت راست به یک نزدیک شود. تا اثبات عدم وجود حد تابع f در $x=۱$ کامل شود.

در ۱ دنباله همگرا به ۱ و صعودی است. یعنی به ازای هر n طبیعی داریم: $\frac{۳}{۴}\le\frac{۲n+۱}{۲n+۲}<۱$

پس این دنباله از مقادیر کم‌تر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود.

در ۲ دنباله همگرا به $\frac{۲}{۳}$ است و انتخاب مناسبی برای اثبات عدم وجود حد تابع در $x=۱$ نخواهد بود.

در ۳ دنباله همگرا به ۱ و نزولی است. یعنی به ازای هر n طبیعی داریم: $۱<\frac{۲n+۱}{۲n-۱}\le ۳$

بنابراین خواهیم داشت: $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{۲n+۱}{۲n-۱})=\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{|x-۱|}{x-۱}=۱$

پس این دنباله برای اثبات عدم وجود حد تابع f در نقطه‌ی $x=1$ به همراه دنباله‌ی $\{\frac{n-1}{n}\}$ مناسب است.

در ۴ دنباله همگرا به ۱ و صعودی است یعنی به ازای هر n طبیعی داریم: $\frac{4}{5}\le\frac{2n+2}{2n+3}<1$

بنابراین دنباله‌ی مورد نظر برای اثبات عدم وجود حد تابع f در نقطه‌ی $x=1$ مناسب نیست.

۳۳- گزینه‌ی «۲» در ابتدا با توجه به گزینه‌ها درمی‌یابیم ۴ مردود است. زیرا هر دو دنباله‌ی موجود در این گزینه به عددی غیر از a همگرا هستند.

از طرفی نقطه‌ی ضعف تابع گنگ و گویا شدن متغیر x در ورودی است. پس گزینه‌ای قابل‌قبول است که به این نقطه ضعف اشاره کند.

در ۱ چون $\{a+\frac{1}{n}\}$ و $\{a-\frac{1}{n}\}$ هر دو دارای جملات گویا هستند پس فقط در شاخه‌ی اعداد گویا در تابع قرار می‌گیرند.

$$\lim_{n\to\infty} f(a+\frac{1}{n})=\lim_{n\to\infty} f(a-\frac{1}{n})=\lim_{x\to a} 0=0$$

در ۲ جملات دنباله‌ی $\{a+\frac{1}{n}\}$ گویا و جملات دنباله‌ی $\{a+\frac{\sqrt{2}}{n}\}$ گنگ هستند. پس:

$$\lim_{n\to\infty} f(a+\frac{1}{n})=\lim_{x\to a} 0=0$$

$$\lim_{n\to\infty} f(a+\frac{\sqrt{2}}{n})=\lim_{x\to a} 1=1$$

و این یعنی تابع f در هر نقطه‌ی $a\in Q$ فاقد حد است.

در ۳ هر دو دنباله به ازای هر n طبیعی جملاتی گنگ دارند و فقط در شاخه‌ی گنگ تابع قرار می‌گیرند. یعنی:

$$\lim_{n\to\infty} f(a+\frac{\sqrt{2}}{n})=\lim_{n\to\infty} f(a-\frac{\sqrt{2}}{n})=\lim_{x\to a} 1=1$$

۳۴- گزینه‌ی «۱» با توجه به گزینه‌ها درمی‌یابیم، هر چهار گزینه دنباله‌هایی همگرا به a دارند. بنابراین فقط گزینه‌ای برای اثبات عدم وجود حد تابع در $a\notin\mathbb{Q}$ مناسب است که به نقطه‌ی ضعف تابع اشاره کند. این نقطه‌ی ضعف داشتن دو شاخه‌ی ورودی گنگ و گویاست.

از آن‌جایی که a عددی گنگ است، جملات دنباله‌ی $\{a+\frac{\sqrt{2}}{n}\}$ و $\{a+\frac{1}{n}\}$ در ۲ و جملات دنباله‌ی $\{a+\frac{\sqrt{3}}{n}\}$ و $\{a-\frac{\sqrt{3}}{n}\}$ در ۴ به طور مشخص گویا نخواهند بود. پس آن‌ها پاسخ صحیح نیستند.

از طرفی در ۳ تمام جملات دنباله‌ها گویا می‌باشند. یعنی این گزینه نیز مردود است.

اما در ۱ داریم:

$$\lim_{x\to\infty} f(a+\frac{2}{n})=\lim_{x\to a} 1=1 \qquad (a+\frac{2}{n}\notin\mathbb{Q})$$

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{[na]}{n})=\lim_{x\to a} 0=0 \qquad (\frac{[na]}{n}\in\mathbb{Q})$$

بنابراین ۳ برای اثبات عدم وجود حد تابع f در نقطه‌ای گنگ مانند a مناسب است.

۳۵- گزینه‌ی «۴»

قضایای حد

اگر D زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد که $f,g:D\to\mathbb{R}$ تابع‌هایی باشند به طوری که $\lim_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim_{x\to a} g(x)=L_2$ در این صورت:

الف) $\lim_{x\to a}(f+g)(x)=L_1+L_2$

ب) $\lim_{x\to a}(f-g)(x)=L_1-L_2$

ج) $\lim_{x\to a}(fg)(x)=L_1L_2$

د) $\lim_{x\to a}\frac{f}{g}(x)=\frac{L_1}{L_2} \quad , \quad L_2\neq 0$

از قضایای بالا نتیجه می‌شود که:

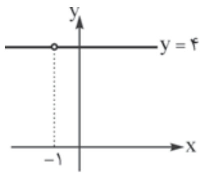
۱) $\lim_{x\to a}(f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x))=\lim_{x\to a} f_1(x)+\lim_{x\to a} f_2(x)+\cdots+\lim_{x\to a} f_n(x)$

۲) $\lim_{x\to a}(f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x))=\lim_{x\to a} f_1(x)\lim_{x\to a} f_2(x)\cdots\lim_{x\to a} f_n(x)$

۳۶- گزینه‌ی «۳»

۳۷- گزینه‌ی «۱»

۳۸- گزینه‌ی «۱» برای محاسبه حد $f+g$، در صورتی‌که حد f یا g موجود نباشد، باید ابتدا $f+g$ را تشکیل داد و سپس حد آن را محاسبه نمود.



$$\lim_{x\to -۱}(f(x)+g(x))=(\frac{۱}{x+۱}+\frac{۴x+۳}{x+۱})=\lim_{x\to -۱}\frac{۴x+۴}{x+۱}=۴$$

ولی $(f+g)(-۱)$ تعریف نشده است.

۳۹- گزینه‌ی «۲» با توجه به نمودار تابع f داریم $\lim_{x\to ۰^+}f(x)=۰$ و $\lim_{x\to ۰^-}f(x)=۲$ ، پس باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که $\lim_{x\to ۰^-}g(x)=۰$ باشد تا $\lim_{x\to ۰}fg(x)=۰$. بدین ترتیب تنها گزینه‌ی درست ۲ است.

۴۰- گزینه‌ی «۳» کافی است مقدار x یعنی $-\frac{\pi}{۲}$ را در تابع جایگذاری کنیم:

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin^۲x+۲\cos x}{۲\sin^۲x-\cos x}=\frac{(-۱)^۲}{۲(-۱)^۲}=\frac{۱}{۲}$$

۴۱- گزینه‌ی «۴»

نتایج قضایا

اگر $\lim_{x\to a}f(x)=L$ باشد آن‌گاه:

۱ $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}$ (در حالتی که n زوج است $L>۰$)

۲ $\lim_{x\to a}(f(x))^n=L^n$

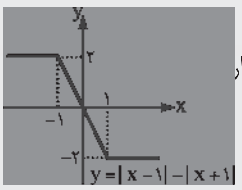
۳ $\lim_{x\to a}\frac{۱}{f(x)}=\frac{۱}{L}$ $(L\neq ۰)$

$$\lim_{x\to -۱}(\frac{x+۵}{۳x^۳+۲})^۳=(\lim_{x\to -۱}\frac{x+۵}{۳x^۳+۲})^۳=(-۴)^۳=-۶۴$$

۴۲- گزینه‌ی «۲»

تابع کران‌دار

اگر A زیرمجموعه‌ای از دامنه‌ی f باشد، آن‌گاه f را بر روی مجموعه‌ی A کران‌دار می‌نامیم، در صورتی که عدد مثبتی مانند M یافت شود به طوری که برای هر $x\in A$ ، $|f(x)|\leq M$ باشد.



به بیان ساده‌تر اگر $f(x)$ دارای برد محدود به دو عدد حقیقی باشد آن را کران‌دار می‌نامیم. مثلاً تابع $f(x)=\cos x$ کران‌دار است، زیرا برد این تابع $[-۱,۱]$ است و یا تابع $f(x)=|x-۱|-|x+۱|$ کران‌دار است زیرا برد این تابع $[-۲,۲]$ است.

ضمناً هر تابع ثابتی کران‌دار است.

در ۱ داریم: $D_f=[-۱,۱]\ ,\ R_f=[۰,۱]$

یعنی این تابع کران‌دار است.

در ۲ داریم: $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}\ ,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}x^۲\sin\frac{۱}{x}=\lim_{x\to\infty}x^۲\times\frac{۱}{x}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$

یعنی این تابع بی‌کران است.

در ۳ داریم: $D_f=\mathbb{R}\ ,\ R_f=[۰,۱)$

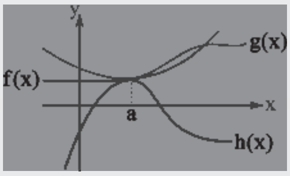
پس تابع $f(x)=\frac{x^۲}{x^۲+۱}$ کران‌دار است.

در ۴ داریم: $D_f=\mathbb{R}\ ,\ R_f=[-\sqrt{۲},\sqrt{۲}]$

پس تابع $f(x)=\sin x+\cos x$ نیز تابعی کران‌دار است.

۴۳- گزینه‌ی «۴» **قضیه‌ی فشردگی**

هرگاه به ازای هر x در بازه‌ای شامل a (احتمالاً به جز خود a) داشته باشیم $h(x) \le f(x) \le g(x)$ و نیز $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ در این صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.



مثلاً $\lim\limits_{x\to 0} |x|\sin\frac{1}{x} = 0$ است چون:

$$\forall x; -1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1 \xrightarrow{\times|x|} -|x| \le |x|\sin\frac{1}{x} \le |x|$$

$$\lim_{x\to 0}(-|x|) = \lim_{x\to 0}(|x|) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}|x|\sin\frac{1}{x} = 0$$

نتیجه‌ی قضیه‌ی فشردگی: اگر تابع $g(x)$ تابعی کران‌دار باشد (حد داشته باشد و یا نداشته باشد) و $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$$

مثال نقض برای ۴: اگر $f(x) = x$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to 1} x = 1$. از طرفی فرض کنیم $g(x) = \begin{cases} 1 & x \ge 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$ باشد، بدین ترتیب $\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x)$ وجود ندارد.

زیرا $(f.g)(x) = \begin{cases} x & x \ge 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$ و $\lim\limits_{x\to 1^+}(f.g)(x) = 1$ و $\lim\limits_{x\to 1^-}(f.g)(x) = 0$.

۴۴- گزینه‌ی «۲»

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}(3-\cos^2 x) = \lim\limits_{x\to 0}(2+x^2) = 2 \\ 3-\cos^2 x \le f(x) \le 2+x^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق قضیه‌ی فشردگی}} \lim_{x\to 0} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}$$

۴۵- گزینه‌ی «۳»

$$\begin{cases} 3-x^2 \le f(x) \le 3+x^2 \\ \lim\limits_{x\to 0}(3-x^2) = \lim\limits_{x\to 0}(3+x^2) = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق قضیه‌ی فشردگی}} \lim_{x\to 0} f(x) = 3$$

بدین ترتیب:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)-3}{f(x)+1} = \frac{2\lim\limits_{x\to 0} f(x) - 3}{\lim\limits_{x\to 0} f(x) + 1} = \frac{2(3)-3}{3+1} = \frac{3}{4}$$

۴۶- گزینه‌ی «۳»

$$\sin x \le xf(x) \le x^2 + x \Rightarrow \begin{cases} x > 0: \frac{\sin x}{x} \le f(x) \le x+1 \\ x < 0: x+1 \le f(x) \le \frac{\sin x}{x} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1$$

با توجه به قضیه‌ی فشردگی می‌توان گفت $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ و بدین ترتیب:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3f(x)+2}{f(x)} = \frac{3(1)+2}{1} = 5$$

۴۷- گزینه‌ی «۳» از قوانین براکت‌ها می‌دانیم که $0 \le x - [x] < 1$ است. این رابطه برای $\frac{2}{x}$ نیز برقرار است.

$$(1)\ 0 \le \frac{2}{x} - [\frac{2}{x}] < 1 \xrightarrow[x>0]{\times x} 0 \le 2 - x[\frac{2}{x}] < x$$

$$\lim_{x\to 0^+}(0) = \lim_{x\to 0^+}(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}(2 - x[\frac{2}{x}]) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x[\frac{2}{x}] = 2$$

$$(2)\ 0 \le \frac{2}{x} - [\frac{2}{x}] < 1 \xrightarrow[x<0]{\times x} 0 \ge 2 - x[\frac{2}{x}] > x$$

$$\lim_{x\to 0^-}(0) = \lim_{x\to 0^-}(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^-}(2 - x[\frac{2}{x}]) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} x[\frac{2}{x}] = 2$$

لذا نتیجه می‌گیریم $\lim\limits_{x\to 0} x[\frac{2}{x}] = 2$. البته در ادامه فصل روش سریع‌تری برای این نوع سؤالات ارائه خواهیم کرد.

۴۸- گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{x\to 0} x([\frac{1}{x}]-\cos\frac{1}{x})=\lim_{x\to 0} x[\frac{1}{x}]-\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}=1-0=1$$

به کمک قضیه‌ی فشردگی می‌توان اثبات نمود $\lim_{x\to 0} x[\frac{1}{x}]=1$ و هم‌چنین $\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}=0$. پس حاصل حد برابر یک است.

۴۹- گزینه‌ی «۳» تابع دیریکله تابعی کران‌دار است و در هیچ نقطه‌ای حد ندارد. این تابع فقط هنگامی دارای حد خواهد بود که در تابعی با حد صفر ضرب شود. بنابراین ۳ صحیح است، زیرا $\lim_{x\to 1}(x^2-1)=0$.

۵۰- گزینه‌ی «۲» با توجه به نتیجه‌ی فشردگی چون f در هیچ نقطه‌ای حد ندارد اما کران‌دار است، پس تابعی در دو نقطه حد دارد که در دو نقطه دارای حد صفر باشد.

۱ $y=x(x-2)(x+2)f(x) \Rightarrow$ این تابع در سه نقطه‌ی $\{-2, 2, 0\}$ دارای حد صفر است.

۲ $y=\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)f(x) \Rightarrow$ این تابع در دو نقطه‌ی $\{1, 0\}$ دارای حد صفر است.

۳ $y=(x^2+1)f(x) \Rightarrow$ در هیچ نقطه‌ای حد ندارد.

۴ $y=(x-1)^3f(x) \Rightarrow$ فقط در $x=1$ حد دارد.

۵۱- گزینه‌ی «۳» چون $|f(x)|\le 4$ است، پس $f(x)$ تابعی کران‌دار است و طبق اطلاعات مسئله در هیچ نقطه‌ای حد ندارد. اما حد تابع $y=[x]+[-x]$ در a همواره برابر (۱-) است ($\lim_{x\to a}([x]+[-x])=-1$). پس تابع g در هیچ نقطه‌ای حد ندارد چون $\lim_{x\to a} g(x)=-\lim_{x\to a} f(x)$.

تابع $h(x)$ دقیقاً در سه نقطه‌ی $\{1, 0, -1\}$ حد دارد، چون:

$$\lim_{x\to a}(x^3-x)=a^3-a=0 \Rightarrow a=0, 1, -1$$

۵۲- گزینه‌ی «۳» تابع $\sin\frac{1}{x-1}$ همواره کران‌دار است.

$$-1\le \sin\frac{1}{x-1}\le 1$$

پس:

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^2\sin\frac{1}{x-1}=0\times \text{کران‌دار}=0$$

تابع $[x]$ در همسایگی $x=0$ تابعی کران‌دار است. پس:

$$\lim_{x\to 0} x^2[x]=0$$

تابع $\tan\frac{1}{x}$ در همسایگی صفر کران‌دار نیست چون هرچه x به صفر نزدیک شود باز هم امکان نامتناهی بودن $\tan\frac{1}{x}$ وجود دارد.

۵۳- گزینه‌ی «۲»

حدهای یک‌طرفه

گوئیم تابع $f(x)$ در $x=a$ (از دامنه‌ی f) دارای حد راست است و می‌نویسیم $\lim_{x\to a^+} f(x)=L$، هرگاه به ازای هر دنباله از عضوهای دامنه‌ی f مانند دنباله‌ی $\{a_n\}$ که به a همگراست و $a_n>a$، داشته باشیم: $\lim_{n\to +\infty} f(a_n)=L$.

یعنی باید دنباله‌ی $\{a_n\}$ دو شرط داشته باشد؛ اولاً به a همگرا باشد و ثانیاً جملاتش از a بیشتر باشند.

گوئیم تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ دارای حد چپ است و می‌نویسیم $\lim_{x\to a^-} f(x)=L$، هرگاه به ازای هر دنباله از عضوهای دامنه‌ی f مانند $\{a_n\}$ که به a همگراست و $a_n<a$ داشته باشیم: $\lim_{n\to +\infty} f(a_n)=L$

یعنی باید دنباله‌ی $\{a_n\}$ دو شرط داشته باشد: اولاً به a همگرا باشد و ثانیاً جملاتش از a کمتر باشد.

مثلاً در تابع $f(x)=\begin{cases} x+1 & x>0 \\ x-2 & x<0 \end{cases}$ برای محاسبه‌ی حد چپ و راست تابع در $x=0$، دنباله‌ی $a_n=\frac{1}{n}$ برای حد راست و $b_n=\frac{-1}{n}$ برای حد چپ مناسب است.