مفهوم و تعریف حد

۱- کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر $f(a)=L$ باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$.

۲) اگر تابع f در بازه‌ی باز I، فقط در سمت راست نقطه‌ی a تعریف شده باشد، ممکن است حد تابع f در نقطه‌ی a موجود باشد.

۳) اگر تابع f در بازه‌ی باز I، فقط در سمت چپ نقطه‌ی a تعریف شده باشد، ممکن است حد تابع f در نقطه‌ی a موجود باشد.

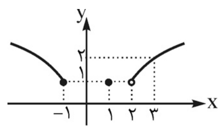
۴) اگر تابع f در بازه‌ی باز I شامل نقطه‌ی a تعریف شده باشد، (مگر احتمالاً در خود a)، آن‌گاه ممکن است حد تابع f در نقطه‌ی a موجود باشد.

۲- تابع $f(x)=2x+1$ مفروض است. در جدول روبه‌رو حاصل $a+b+c$ کدام است؟

x	۱	←...	۱/۰۱	۱/۱	۱/۵
f(x)	c	←...	b	a	۴

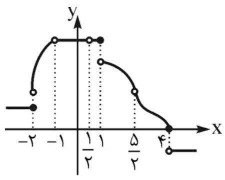
۱) ۹/۰۲
۲) ۶/۰۲
۳) ۹/۲۲
۴) ۶/۲۲

۳- با توجه به نمودار تابع f، کدام حد درست محاسبه نشده است؟



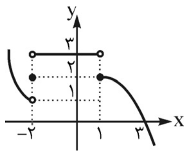
۱) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$
۲) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$
۳) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=1$
۴) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=2$

۴- با توجه به نمودار، تابع f در بازه‌ی $(-1,3)$ در چند نقطه حد ندارد؟



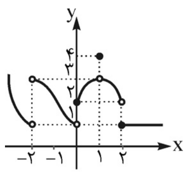
۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

۵- با توجه به نمودار، کدام گزینه نادرست است؟



۱) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=3$
۲) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=0$
۳) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=3$
۴) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=3$

۶- نمودار تابع f به شکل روبه‌رو داده شده، حاصل $-2\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)+\lim\limits_{x\to (-2)^+} 3f(x)-\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ کدام است؟



۱) ۶
۲) ۲
۳) ۵
۴) ۳

۷- برای تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{9-x^2} & |x|<3\\ 1 & x=5\end{cases}$، کدام‌یک از حدهای زیر وجود ندارد؟

۱) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$
۲) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$
۳) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$
۴) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

۸- برای تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & |x|\geq 2\\ 2 & x=1\end{cases}$، کدام‌یک از حدهای زیر وجود ندارد؟

۱) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$
۲) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$
۳) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$
۴) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

۹- چه تعداد از حدهای زیر درست محاسبه نشده است؟

الف) $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt{1-x^2}=0$
ب) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-1}{x-1}=3$
ج) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sqrt{x})=1$
د) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x-1}=0$

۱) هیچ
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

حد راست و چپ یک تابع

۱۰- اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$ **باشد، کدام گزینه می‌تواند نادرست باشد؟**

۱) $\lim\limits_{t\to ۰} f(a+t^{۲})=L$ ۲) $\lim\limits_{\delta\to ۰^+} f(a+\delta)=L$ ۳) $\lim\limits_{\delta\to ۰^-} f(a-\delta)=L$ ۴) $\lim\limits_{t\to ۰} f(a+t)=L$

۱۱- تابع $f(x)=\begin{cases}(a+۱)x+۳ & x>-۳\\ -۲x^{۲}+b & x<-۳\end{cases}$ **مفروض است. اگر** $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)=-۴$ **و** $\lim\limits_{x\to -۴} f(x)=-۱$ **باشد، آن‌گاه مقدار** $۴a-b$ **کدام است؟** *(نهایی ۸۵)*

۱) -۱ ۲) ۷ ۳) -۷ ۴) ۱

۱۲- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{۲x^{۲}-۴a} & x\geq ۲\\ x+b & -۲\leq x<۲\\ x^{۲}+bx+۳a & x<-۲\end{cases}$ **در نقطه‌ی** $x=-۲$ **دارای حد بوده و** $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۲$ **باشد، مقدار** $۲b-a$ **کدام است؟** *(نهایی ۸۹)*

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۱۳- تابع $f(x)=\begin{cases}ax^{۲}+bx+۵ & x\geq ۳\\ \dfrac{ax-۳}{x+b} & x<۳\end{cases}$ **مفروض است. اگر** $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=۲$ **و** $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=۵$ **باشد، مقدار** $۲a-b$ **کدام است؟** *(نهایی ۸۳)*

۱) ۴ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) ۵

۱۴- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}۳ax+b & x\geq ۱\\ ۴x^{۲}-۳bx-a & x<۱\end{cases}$ **در نقطه‌ی** $x=۱$ **دارای حد باشد، مقدار** $a+b$ **کدام است؟**

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۵- تابع $f(x)=\dfrac{b(x-۱)}{|x-۱|}+\dfrac{۲a|x|}{x}$ **مفروض است. اگر** $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۱$ **و** $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=-۳$ **باشد، حاصل** $۴a^{۲}+b^{۲}$ **کدام است؟**

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۳

۱۶- تابع $f(x)=\dfrac{x-۱}{\sqrt{x+۳}-۲}$ **در نقطه‌ای به طول** -۳ ....

۱) حد و مقدار دارد. ۲) حد دارد ولی مقدار ندارد. ۳) حد ندارد ولی مقدار دارد. ۴) حد و مقدار ندارد.

۱۷- تابع $f(x)=\dfrac{x|x-۲|}{x^{۲}-۴}$ **در نقطه‌ای به طول** ۲ ....

۱) حد و مقدار دارد. ۲) حد دارد ولی مقدار ندارد. ۳) حد ندارد ولی مقدار دارد. ۴) حد و مقدار ندارد.

۱۸- اگر $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi x}{۶}+\cos\dfrac{۲\pi x}{۶} & x>-۴\\ \sin\dfrac{۲\pi x}{۶}-\cos\dfrac{۳\pi x}{۴} & x<-۴\end{cases}$ **باشد، حاصل** $\lim\limits_{x\to(-۶)^-} f(\dfrac{۲x}{۳})$ **کدام است؟**

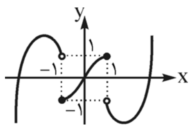
۱) $-\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}+۱$ ۲) $\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}-۱$ ۳) $-\dfrac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$ ۴) $\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}+۱$

۱۹- اگر $f(x)=\begin{cases}\tan\dfrac{۳\pi x}{۴}-\cos\dfrac{۳\pi x}{۴} & x>۱\\ \cot\dfrac{۳\pi x}{۴}+\sin\dfrac{۳\pi x}{۲} & x\leq ۱\end{cases}$ **باشد، حاصل** $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(|\dfrac{۲x-۱}{۳}|)$ **کدام است؟**

۱) $\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}-۱$ ۲) $-\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}-۱$ ۳) ۲ ۴) -۲

۲۰- اگر $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۳a|x-۱|}{x-۱}+۱ & x>۱\\ ۲ & x=۱\\ ax^{۲}-\dfrac{۳|x-۱|}{x-۱} & x<۱\end{cases}$ **باشد و** $\lim\limits_{x\to(-۲)^-} f(-\dfrac{x}{۲})=f(۱)$ **، آن‌گاه مقدار** a **کدام است؟**

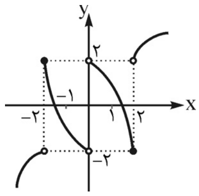
۱) $-\dfrac{۱}{۳}$ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) $\dfrac{۱}{۳}$



۲۱- نمودار f داده شده است. حاصل $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(|x|)+2\lim\limits_{x\to 0} f(1-x^2)+\lim\limits_{x\to 1^+} fof(x)$ **کدام است؟**

۱) ۲ ‏‏ ۲) ۱

۳) صفر ‏‏ ۴) ۴



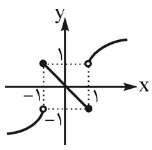
۲۲- با توجه به شکل روبه‌رو حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+} fofof(x)$ **کدام است؟**

۱) ۱ ‏‏ ۲) ۱-

۳) ۲ ‏‏ ۴) ۲-

۲۳- اگر $f(x)=\begin{cases}-x & x>0\\ 1 & x=0\\ -2x & x<0\end{cases}$ **باشد، حاصل** $\lim\limits_{x\to 0^+} fofof(x)$ **کدام است؟**

۱) صفر ‏‏ ۲) ۱ ‏‏ ۳) ۲- ‏‏ ۴) ۱-



۲۴- با توجه به نمودار تابع f کدام حد نادرست محاسبه شده است؟

۱) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(|x^2-1|)=-1$ ‏‏ ۲) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(\frac{x}{2})=-1$

۳) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(f(x))=-1$ ‏‏ ۴) $\lim\limits_{x\to(-1)^-} |f(x)|=1$

۲۵- اگر $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{|x-1|} & x\neq 1\\ 0 & x=1\end{cases}$ **باشد، حاصل** $-\lim\limits_{x\to 0^-} f(1+x^2)+\lim\limits_{x\to 0^-} f(1-x^2)$ **کدام است؟**

۱) ۲- ‏‏ ۲) ۱- ‏‏ ۳) صفر ‏‏ ۴) ۲

۲۶- تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|\sin 2x|}{\sin 2x}+2\cos x & |x|<\pi\\ \dfrac{\sin 3x}{|\sin 3x|}-\cos x & |x|>\pi\end{cases}$ **مفروض است. حاصل** $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)+\lim\limits_{x\to(-\pi)^-} f(x)$ **کدام است؟**

۱) ۳ ‏‏ ۲) ۱- ‏‏ ۳) ۱ ‏‏ ۴) ۳-

۲۷- مجموع حد چپ و راست تابع $f(x)=\dfrac{(\sin\frac{\pi x}{2}+\cos\pi x)|x+1|}{3x^2+4x+1}$ **در نقطه‌ی** $x=-1$ **کدام است ؟**

۱) ۲- ‏‏ ۲) صفر ‏‏ ۳) ۲ ‏‏ ۴) ۱-

۲۸- حاصل $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{3x^2+5x+2}$ **کدام است؟**

۱) موجود نیست. ‏‏ ۲) صفر ‏‏ ۳) $\sqrt{10}$ ‏‏ ۴) ۱

∞ **۲۹- چه تعداد از حدهای زیر وجود دارد؟**

الف) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\log(x-2)}$ ‏‏ **ب)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|}{x-2}$ ‏‏ **ج)** $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2-1-\sqrt{x^2-1}}$

۱) صفر ‏‏ ۲) ۱ ‏‏ ۳) ۲ ‏‏ ۴) ۳

۳۰- اگر $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a|\sin x+\cos x|}{\sin x+\cos x}+1 & x\neq\frac{\pi}{4}\\ \dfrac{3x}{\pi}-1 & x=\frac{\pi}{4}\end{cases}$ **و** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}^+} f(-\frac{3x}{4})=f(\frac{\pi}{4})$ **باشد، مقدار a کدام است؟**

۱) $\frac{5}{4}$ ‏‏ ۲) $-\frac{5}{4}$ ‏‏ ۳) $-\frac{3}{4}$ ‏‏ ۴) $\frac{3}{4}$

۳۱- اگر $f(x)=\dfrac{2|x-2|}{x-2}$ **باشد، حد چپ تابع** $fof(x)$ **در نقطه‌ی** $x=2$ **کدام است؟**

۱) صفر ‏‏ ۲) $\frac{1}{2}$ ‏‏ ۳) ۲ ‏‏ ۴) ۲-

۳۲- تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2+|x|}{2|x|} & x>0\\ \dfrac{x^2-2|x|}{|x|} & x<0\end{cases}$ **مفروض است. حاصل** $2\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(\sin x-\cos x)-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(\sin x-\cos x)$ **کدام است؟**

۱) ۳- ‏‏ ۲) $\frac{9}{2}$ ‏‏ ۳) $-\frac{9}{2}$ ‏‏ ۴) ۳

۳۳- تابع $f(x)=\begin{cases}\sin \pi x-\cos x & x>0\\ 2x-1 & x=0\\ \tan \pi x-2\cos x & x<0\end{cases}$ مفروض است. حاصل $2\lim\limits_{x\to 0^+} f(\sin x-\tan x)-\lim\limits_{x\to 0^-} f(\sin x-\tan x)$ کدام است؟

۱) -3 ۲) صفر ۳) -1 ۴) -4

۳۴- تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & x\neq 0,-1\\ 0 & x=0\\ 2 & x=-1\end{cases}$ مفروض است. حاصل حد راست تابع $fofof(\sin x-\tan x)$ در نقطه‌ی $x=0$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 2 ۳) 1 ۴) صفر

۳۵- اگر $f(x)=\begin{cases}\sin^2 2x & x\geq 0\\ \cos^2 3x & x<0\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-1 & x\geq 0\\ 2x & x<0\end{cases}$ باشد، چه تعداد از توابع زیر در نقطه‌ی $x=0$ دارای حد هستند؟

الف) $\frac{g}{f}$ ب) $f+g$ ج) $f-g$ د) $f\cdot g$

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۳۶- کدام تابع در نقطه‌ی $x=1$ دارای حد نیست؟

۱) $f(x)=\sqrt{\log x}$ ۲) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ۳) $f(x)=\sqrt{\sin(x-1)}$ ۴) $f(x)=2^{x-1}$

۳۷- کدام‌یک از حدود زیر وجود ندارد؟

۱) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\sin x-\tan x}$ ۲) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-1-\sqrt{x-1}}$ ۳) $\lim\limits_{x\to 1}\log_x 1$ ۴) $\lim\limits_{x\to 0}\log_x(x+1)$

۳۸- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}3x^2-x & x>1\\ ax^2+b & x<1\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=1$ و تابع $g(x)=\begin{cases}2a-x^2 & x>2\\ x^2+2b & x<2\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=2$ دارای حد باشند، کدام تابع زیر در نقطه‌ی $x=3$ دارای حد است؟

۱) $h(x)=\begin{cases}\frac{ax}{2}+b & x>3\\ 2x-a & x<3\end{cases}$

۲) $h(x)=\begin{cases}2ax+3b & x>3\\ ax^2+bx & x<3\end{cases}$

۳) $h(x)=\begin{cases}ax+bx & x>3\\ |bx-a| & x<3\end{cases}$

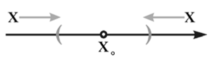
۴) $h(x)=\begin{cases}2ax+|x| & x>3\\ 2ax+bx & x<3\end{cases}$

۱- گزینه‌ی «۱»

مفهوم حـد

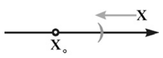
مفهوم میل‌کردن نقطه‌ی متحرک x به نقطه‌ی ثابت $x_\circ$:

نقطه‌ی ثابت $x_\circ$ را روی محور افقی در نظر می‌گیریم و نقطه‌ی متحرک x را به سمت $x_\circ$ حرکت می‌دهیم. می‌گوییم x به اندازه‌ی کافی به $x_\circ$ نزدیک شده است، هرگاه x در یک بازه‌ی بسیار کوچک اطراف $x_\circ$ قرار گیرد. دقت می‌کنیم، نقطه‌ی متحرک به نقطه‌ی ثابت بسیار نزدیک می‌شود ولی هیچ‌گاه نمی‌تواند بر آن منطبق شود ($x \neq x_\circ$). عمل میل‌کردن نقطه‌ی متحرک x به نقطه‌ی ثابت $x_\circ$ را با نماد $x \to x_\circ$ نمایش می‌دهند.

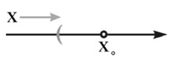


بدیهی است نزدیک‌شدن x به $x_\circ$ از دو سمت امکان‌پذیر است. یکی از سمت مقادیر بزرگ‌تر از $x_\circ$ یعنی سمت راست که نماد آن $x \to x_\circ^+$ می‌باشد و دیگری از سمت مقادیر کوچک‌تر از $x_\circ$ یعنی سمت چپ که نماد آن $x \to x_\circ^-$ است. به جملات زیر و تعابیر هندسی آن‌ها دقت کنید:

هنگامی که می‌نویسیم $x \to x_\circ^+$ یعنی x فقط از مقادیر **بزرگ‌تر** از $x_\circ$ به $x_\circ$ میل می‌کند.

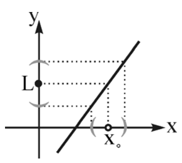


هنگامی که می‌نویسیم $x \to x_\circ^-$ یعنی x فقط از مقادیر **کوچک‌تر** از $x_\circ$ به $x_\circ$ میل می‌کند.



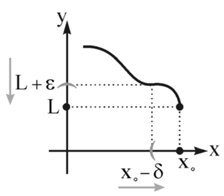
مفهوم و تعبیر هندسی حد تابع:

برای پرداختن به مفهوم $\lim\limits_{x \to x_\circ} f(x) = L$ روی محور افقی یک بازه‌ی بسیار کوچک در مجاورت $x_\circ$ (با فرض $x \neq x_\circ$) در نظر می‌گیریم. بدیهی است که متناظر با این بازه روی محور افقی، یک بازه روی محور عمودی خواهیم داشت. ما می‌خواهیم تابع f را به اندازه‌ی دلخواه به L نزدیک کنیم.



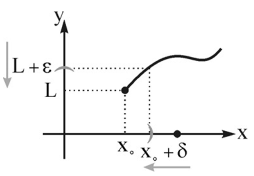
از آن‌جایی که y تابع x است، برای این‌که y به L نزدیک شود، ناچاریم x را به سمت $x_\circ$ میل دهیم. در نتیجه اگر x وارد بازه‌ی بسیار کوچک مجاورت $x_\circ$ (با فرض $x \neq x_\circ$) شود، آن‌گاه y نیز در بازه‌ی بسیار کوچک در مجاورت L قرار می‌گیرد. هنگامی که می‌نویسیم $\lim\limits_{x \to x_\circ} f(x) = L$ یعنی تابع f را می‌توان به مقدار دلخواه به L نزدیک کرد به شرطی که x به قدر کافی به $x_\circ$ نزدیک شود.

حد چپ و حد راست:



هنگامی که می‌نویسیم $\lim\limits_{x \to x_\circ^-} f(x) = L$ یعنی اگر بتوان برای xهای داخل بازه‌ی بسیار کوچکِ سمت چپِ $x_\circ$ به اندازه‌ی کافی به $x_\circ$ نزدیک شد، آن‌گاه مقادیر f به اندازه‌ی دلخواه به L نزدیک می‌شوند. به عبارت دیگر وقتی که x از مقادیر کوچک‌تر از $x_\circ$ به $x_\circ$ نزدیک شود، تابع f به اندازه‌ی دلخواه به نقطه‌ی L نزدیک می‌شود.

همچنین هنگامی که می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to x_\circ^+} f(x)=L$ یعنی اگر بتوان برای x های داخل بازه‌ی بسیار کوچک سمت راست $x_\circ$ به اندازه‌ی کافی به $x_\circ$ نزدیک شد، آن‌گاه مقادیر f به اندازه‌ی دلخواه به L نزدیک می‌شوند. به عبارت دیگر وقتی x از مقادیر بزرگ‌تر از $x_\circ$ به $x_\circ$ میل می‌کند، تابع f به اندازه‌ی دلخواه به نقطه‌ی L نزدیک می‌شود.



نکته اگر $x_\circ$ یک نقطه‌ی میانی در دامنه‌ی f باشد و تابع f در نقطه‌ی $x_\circ$ حد راست و حد چپ داشته باشد و این دو حد با هم برابر باشند، تابع در $x_\circ$ دارای حد است؛ و برعکس، اگر تابع در یک نقطه حد داشته باشد، در آن نقطه حد راست و حد چپ دارد و این دو حد با هم برابرند.

$$\lim_{x\to x_\circ} f(x)=L \iff \lim_{x\to x_\circ^+} f(x)=\lim_{x\to x_\circ^-} f(x)=L$$

اما اگر $x_\circ$ یک نقطه‌ی انتهایی دامنه‌ی تابع f باشد، در این حالت حد چپ یا راست f در $x_\circ$ همان حد تابع f در $x_\circ$ است. فقط در نقاطی که نقاط میانی دامنه‌ی یک تابع هستند، مفهوم حد تابع و حد راست و چپ تابع با هم متفاوت‌اند.

نکته در بررسی حد یک تابع، هرگاه به یکی از نقاط زیر برخوردیم، ناچاریم حد چپ و راست تابع را بررسی کنیم:

۱) ریشه‌های ساده‌ی داخل قدرمطلق
۲) ریشه‌های ساده‌ی زیر رادیکال فرجه زوج
۳) ریشه‌های ساده‌ی مخرج کسر
۴) لبه‌های دامنه
۵) نقاط شکستگی دامنه (در توابع چندضابطه‌ای)
۶) نقاطی که داخل جزءصحیح را به عددی صحیح تبدیل می‌کنند.

توجه کنید حد تابع f در نقطه‌ی a، به معین‌بودن یا معین‌نبودن تابع در a بستگی ندارد.

۲- گزینه‌ی «۳»

$$f(۱/۱)+f(۱/۰۱)+\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۳/۲+۳/۰۲+۳=۹/۲۲$$

۳- گزینه‌ی «۲»

تابع f در $x=۱$ فقط مقدار دارد ولی حد ندارد. زیرا در بازه‌ی باز اطراف این نقطه تعریف نشده است.

۴- گزینه‌ی «۴»

تابع f فقط در نقطه‌ی $x=۱$ متعلق به بازه‌ی $(-۱,۳)$ حد ندارد و در سایر نقاط این بازه دارای حد است. دقت می‌کنیم که این تابع در نقاط به طول‌های $x=-۲$ و $x=۴$ نیز فاقد حد است ولی این نقاط متعلق به بازه‌ی $(-۱,۳)$ نیستند. همچنین تابع در نقاط به طول $x=\frac{۱}{۲}$ و $x=\frac{۵}{۲}$ مقدار ندارد، ولی حد دارد.

۵- گزینه‌ی «۴»

تابع f در نقطه‌ی $x=-۲$ حد ندارد. زیرا:

$$\lim_{x\to(-۲)^+} f(x)=۳$$
$$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x)=۱$$

۶- گزینه‌ی «۳»

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=۱ \Longrightarrow -۲\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=-۲\\ \lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x)=۳ \Longrightarrow \lim\limits_{x\to(-۲)^+} ۳f(x)=۹\\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۲ \Longrightarrow -\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=-۲\end{cases} \Longrightarrow -۲\lim_{x\to ۰^-} f(x)+\lim_{x\to(-۲)^+} ۳f(x)-\lim_{x\to ۲^-} f(x)=۵$$

۷- گزینه‌ی «۳»

با توجه به $D_f=(-۳,۳)\cup\{۵\}$ تابع f در نقطه‌ی $x=۵$ فقط مقدار دارد ولی حد ندارد. زیرا تابع در یک بازه‌ی باز مانند I در اطراف این نقطه تعریف نشده است.

۸- گزینه‌ی «۱»

با توجه به $D_f=(-\infty,-2]\cup\{1\}\cup[2,+\infty)$ می‌توان گفت فقط $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ وجود ندارد. زیرا تابع در اطراف این نقطه تعریف نشده است.

۹- گزینه‌ی «۱»

حد هر چهار قسمت درست محاسبه شده است.

۱۰- گزینه‌ی «۴»

۱ اشاره به حد راست تابع f در نقطه‌ی a دارد. زیرا t اگر از چپ و راست به صفر نزدیک شود، مقدار t^2 همواره مثبت است. ۲ نیز به دلیل آن‌که δ از مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر میل می‌کند، اشاره به حد راست تابع f در نقطه‌ی a دارد. در ۳ چون ماهیت δ منفی است، حاصل $f(a-\delta)$ برابر $f(a^+)$ می‌باشد. یعنی تابع دارای حد راست در نقطه‌ی a است. اما در ۴، $\lim\limits_{t\to 0} f(a+t)=L$ اشاره به حد چپ و راست تابع در نقطه‌ی a دارد. در صورتی که در فرض مسئله فقط حد راست تابع در نقطه‌ی a برابر L است و ما از حد چپ تابع اطلاعی نداریم. پس ۴ می‌تواند نادرست باشد.

۱۱- گزینه‌ی «۳»

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}(a+1)x+3=(a+1)(-1)+3=-a-1+3=-a+2=-4 \Longrightarrow a=6$$

$$\lim_{x\to -4} f(x)=\lim_{x\to -4}(-2x^2+b)=-32+b=-1 \Longrightarrow b=31$$

پس:

$$4a-b=4(6)-31=-7$$

۱۲- گزینه‌ی «۲»

از آن‌جایی که تابع f در نقطه‌ی $x=-2$ دارای حد است، باید حد چپ و راست در این نقطه با هم برابر باشند.

$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}(x+b)=-2+b$$

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}(x^2+bx+3a)=4-2b+3a$$

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim_{x\to(-2)^+} f(x) \Longrightarrow -2+b=4-2b+3a \Longrightarrow 3a-3b=-6 \Longrightarrow a-b=-2$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=2 \Longrightarrow \lim_{x\to 2^+}\sqrt{2x^2-4a}=\sqrt{8-4a}=2 \Longrightarrow 8-4a=4 \Longrightarrow a=1$$

با توجه به این‌که $a=1$ و $a-b=-2$، می‌توان نتیجه گرفت $b=3$. پس:

$$2b-a=6-1=5$$

۱۳- گزینه‌ی «۴»

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\frac{ax-3}{x+b}=\frac{3a-3}{3+b}=2 \Longrightarrow 3a-3=6+2b \Longrightarrow 3a-2b=9$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}(ax^2+bx+5)=9a+3b+5=5 \Longrightarrow 9a+3b=0 \Longrightarrow 3a+b=0$$

با حل دو معادله، دو مجهول خواهیم داشت $a=1$ و $b=-3$. پس $2a-b=2-(-3)=5$.

۱۴- گزینه‌ی «۴»

اگر تابع f در نقطه‌ی $x=1$ دارای حد باشد، باید حد چپ و راست تابع در این نقطه موجود و با هم برابر باشد.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x) \Longrightarrow \lim_{x\to 1^+}(3ax+b)=\lim_{x\to 1^-}(4x^2-3bx-a) \Longrightarrow 3a+b=4-3b-a \Longrightarrow 4a+4b=4 \Longrightarrow a+b=1$$

۱۵- گزینه‌ی «۱»

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2a|x|}{x}+\frac{b(x-1)}{|x-1|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2ax}{x}-\frac{b(x-1)}{x-1}\right)=2a-b=1 \quad ①$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2a|x|}{x}+\frac{b(x-1)}{|x-1|}\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2ax}{x}+\frac{b(x-1)}{x-1}\right)=2a+b=-3 \quad ②$$

از ① و ② نتیجه می‌گیریم $b=-2$ و $a=-\frac{1}{2}$. پس:

$$4a^2+b^2=4\left(\frac{1}{4}\right)+4=5$$

۱۶- گزینه‌ی «۱»

$f(-۳)=\frac{-۳-۱}{-۲}=۲$

$\lim_{x\to -۳} f(x)=\lim_{x\to (-۳)^+} f(x)=۲$

پس تابع f در نقطه‌ی $x=-۳$ حد و مقدار دارد.

۱۷- گزینه‌ی «۴»

تابع f دامنه‌ای برابر $D_f=\mathbb{R}-\{-۲,۲\}$ دارد. پس تابع در نقطه‌ای به طول ۲ مقدار ندارد.

$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-x(x-۲)}{(x-۲)(x+۲)}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-x}{x+۲}=-\frac{۱}{۲}$, $\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x(x-۲)}{(x-۲)(x+۲)}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x}{x+۲}=\frac{۱}{۲}$

پس تابع f در نقطه‌ای به طول ۲ حد ندارد.

۱۸- گزینه‌ی «۴»

وقتی می‌نویسیم $x\to(-۶)^-$ یعنی $x<-۶$. حال طرفین نامساوی را در عدد $\frac{۲}{۳}$ ضرب می‌کنیم. یعنی $\frac{۲}{۳}x<-۴$. پس:

$\lim_{x\to(-۶)^-} f(\frac{۲x}{۳})=f((-۴)^-)$

حال برای محاسبه‌ی $f((-۴)^-)$، کافی‌است حاصل $\lim_{x\to(-۴)^-} f(x)$ را به دست آوریم:

$\lim_{x\to(-۴)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۴)^-}(\sin\frac{۲\pi x}{۶}-\cos\frac{۳\pi x}{۴})=\sin(-\frac{۸\pi}{۶})-\cos(-\frac{۱۲\pi}{۴})=-\sin(\frac{۴\pi}{۳})-\cos(۳\pi)=-\sin(\pi+\frac{\pi}{۳})-\cos\pi=\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱$

۱۹- گزینه‌ی «۱»

وقتی می‌نویسیم $x\to(-۱)^-$ یعنی $x<-۱$. پس: $x<-۱ \Rightarrow ۲x<-۲ \Rightarrow ۲x-۱<-۳ \Rightarrow \frac{۲x-۱}{۳}<-۱$

و در نتیجه: $\lim_{x\to(-۱)^-} f(|\frac{۲x-۱}{۳}|)=f(|(-۱)^-|)=f(۱^+)$

حال برای محاسبه‌ی $f(۱^+)$ می‌توان از $\lim_{x\to ۱^+} f(x)$ استفاده نمود.

$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}(\tan\frac{۳\pi x}{۴}-\cos\frac{۳\pi x}{۴})=\tan\frac{۳\pi}{۴}-\cos\frac{۳\pi}{۴}=\tan(\pi-\frac{\pi}{۴})-\cos(\pi-\frac{\pi}{۴})=-\tan\frac{\pi}{۴}+\cos\frac{\pi}{۴}=-۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲۰- گزینه‌ی «۴»

وقتی می‌نویسیم $x\to(-۲)^-$ یعنی $x<-۲$. پس: $x<-۲ \Rightarrow \frac{x}{۲}<-۱ \Rightarrow \frac{-x}{۲}>۱$

و در نتیجه:

$\lim_{x\to(-۲)^-} f(-\frac{x}{۲})=\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}(\frac{۳a|x-۱|}{x-۱}+۱)=\lim_{x\to ۱^+}(\frac{۳a(x-۱)}{x-۱}+۱)=۳a+۱ \Rightarrow ۳a+۱=f(۱) \Rightarrow ۳a+۱=۲ \Rightarrow a=\frac{۱}{۳}$

۲۱- گزینه‌ی «۱»

$\lim_{x\to(-۱)^-} f(|x|)=\lim_{x\to ۱^+} f(x)=-۱$

$\lim_{x\to ۰} f(۱-x^۲)=\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۱$

$\lim_{x\to ۱^+} fof(x)=f(f(۱^+))=f((-۱)^-)=۱$

و در نتیجه: $\lim_{x\to(-۱)^-} f(|x|)+۲\lim_{x\to ۰} f(۱-x^۲)+\lim_{x\to ۱^+} fof(x)=-۱+۲+۱=۲$

۲۲- گزینه‌ی «۳»

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=۲^-$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(f(x))=\lim_{x\to ۲^-} f(x)=(-۲)^+$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(f(f(x)))=\lim_{x\to (-۲)^+} f(x)=۲$$

حاصل فوق را می‌توان به صورت خلاصه‌تر نیز به دست آورد:

$$\lim_{x\to ۰^+} f(f(f(x)))=f(f(۲^-))=f(f(۲^-))=f((-۲)^+)=۲$$

۲۳- گزینه‌ی «۱»

$$\lim_{x\to ۰^+} fofof(x)=f(f(f(۰^+)))=f(f(۰^-))=f(۰^+)=۰$$

۲۴- گزینه‌ی «۳»

۱) $\lim_{x\to ۰^-} f(|x^۲-۱|)=f(|(-۱)^+|)=f(۱^-)=-۱$

۲) $\lim_{x\to ۲^-} f(\frac{x}{۲})=\lim_{x\to ۱^-} f(x)=-۱$

۳) $\lim_{x\to ۱^-} f(f(x))=f((-۱)^+)=۱$

۴) $\lim_{x\to (-۱)^-} |f(x)|=|-۱|=۱$

پس حد محاسبه شده در ۱، ۲ و ۴ درست و در ۳ نادرست است.

۲۵- گزینه‌ی «۱»

ابتدا تابع f را به صورت $f(x)=\begin{cases} ۱ & x>۱ \\ ۰ & x=۱ \\ -۱ & x<۱ \end{cases}$ می‌نویسیم، سپس حدود خواسته‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰^-} f(۱+x^۲)=f(۱^+)=۱ \quad , \quad \lim_{x\to ۰^-} f(۱-x^۲)=f(۱^-)=-۱$$

پس خواهیم داشت:

$$-\lim_{x\to ۰^-} f(۱+x^۲)+\lim_{x\to ۰^-} f(۱-x^۲)=-۱-۱=-۲$$

۲۶- گزینه‌ی «۲»

تابع f را می‌توان به صورت مقابل نوشت:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{|\sin ۲x|}{\sin ۲x}+۲\cos x & -\pi<x<\pi \\ \frac{\sin ۳x}{|\sin ۳x|}-\cos x & x>\pi \text{ یا } x<-\pi \end{cases}$$

حال حدهای موردنظر را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to \pi^-} f(x)=\lim_{x\to \pi^-} (\frac{|\sin ۲x|}{\sin ۲x}+۲\cos x)=\lim_{x\to \pi^-} (-۱+۲\cos x)=-۱-۲=-۳$$

$$\lim_{x\to (-\pi)^-} f(x)=\lim_{x\to (-\pi)^-} (\frac{\sin ۳x}{|\sin ۳x|}-\cos x)=\lim_{x\to (-\pi)^-} (۱-\cos x)=۱+۱=۲$$

۲۷- گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{x\to (-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to (-۱)^+} \frac{(\sin\frac{\pi x}{۲}+\cos \pi x)(x+۱)}{(x+۱)(۳x+۱)}=\lim_{x\to (-۱)^+} \frac{\sin\frac{\pi x}{۲}+\cos \pi x}{۳x+۱}=\frac{-۱-۱}{-۳+۱}=\frac{-۲}{-۲}=۱$$

$$\lim_{x\to (-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to (-۱)^-} \frac{-(\sin\frac{\pi x}{۲}+\cos \pi x)(x+۱)}{(x+۱)(۳x+۱)}=\lim_{x\to (-۱)^-} \frac{-(\sin\frac{\pi x}{۲}+\cos \pi x)}{۳x+۱}=\frac{۲}{-۲}=-۱$$

۲۸- گزینه‌ی «۲»

با توجه به این‌که $D_f=(-\infty,-۱]\cup[-\frac{۲}{۳},+\infty)$، می‌توان گفت:

$$\lim_{x\to -۱} \sqrt{۳x^۲+۵x+۲}=\lim_{x\to (-۱)^-} \sqrt{۳x^۲+۵x+۲}=۰$$

۲۹- گزینه‌ی «۲»

الف دامنه‌ی تابع را می‌یابیم:

$$\log(x-۲)\geq ۰ \Rightarrow x-۲\geq ۱ \Rightarrow x\geq ۳ \Rightarrow D_f=[۳,+\infty)$$

$$\lim_{x\to ۳}\sqrt{\log(x-۲)}=\lim_{x\to ۳^+}\sqrt{\log(x-۲)}=۰$$

پس حد تابع در نقطه‌ی $x=۳$ وجود دارد.

ب حد چپ و راست تابع را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{|x-۲|}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x-۲}{x-۲}=۱ \quad , \quad \lim_{x\to ۲^-}\frac{|x-۲|}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-(x-۲)}{x-۲}=-۱$$

پس حد تابع در نقطه‌ی $x=۲$ وجود ندارد.

ج دامنه‌ی تابع را می‌یابیم:

$$x^۲-۱\geq ۰ \Rightarrow x^۲\geq ۱ \Rightarrow |x|\geq ۱ \Rightarrow x\geq ۱ \text{ یا } x\leq -۱$$

$$x^۲-۱-\sqrt{x^۲-۱}\geq ۰ \Rightarrow \sqrt{x^۲-۱}(\sqrt{x^۲-۱}-۱)\geq ۰ \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x^۲-۱}\geq ۰ \Rightarrow x=\pm ۱\\ \sqrt{x^۲-۱}-۱\geq ۰ \Rightarrow x^۲\geq ۲ \Rightarrow |x|\geq\sqrt{۲} \Rightarrow x\geq\sqrt{۲} \text{ یا } x\leq -\sqrt{۲}\end{cases}$$

در نهایت دامنه‌ی تابع عبارت است از $D_f=(-\infty,-\sqrt{۲}]\cup[\sqrt{۲},+\infty)\cup\{-۱,۱\}$. بنابراین تابع در نقطه‌ی $x=۱$ حد چپ و راست ندارد.

۳۰- گزینه‌ی «۱»

وقتی می‌نویسیم $x\to\frac{\pi}{۳}^+$ یعنی $x>\frac{\pi}{۳}$ و در نتیجه $-\frac{۳x}{۴}<-\frac{\pi}{۴}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}^+}f(-\frac{۳x}{۴})=\lim_{x\to(-\frac{\pi}{۴})^-}f(x)=\lim_{x\to(-\frac{\pi}{۴})^-}\frac{-a(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}+۱=\lim_{x\to(-\frac{\pi}{۴})^-}(-a+۱)=-a+۱$$

$$f(\frac{\pi}{۴})=\frac{۳(\frac{\pi}{۴})}{\pi}-۱=\frac{۳}{۴}-۱=-\frac{۱}{۴}$$

و در نتیجه:

$$-a+۱=-\frac{۱}{۴} \Rightarrow a=\frac{۵}{۴}$$

۳۱- گزینه‌ی «۴»

تابع f را می‌توان به صورت ساده‌تر $f(x)=\begin{cases}۲ & x>۲\\ -۲ & x<۲\end{cases}$ نوشت. به این ترتیب داریم:

$$\lim_{x\to ۲^-}f(x)=-۲$$

$$\lim_{x\to ۲^-}fof(x)=\lim_{x\to ۲^-}f(f(x))=f(-۲)=-۲$$

۳۲- گزینه‌ی «۴»

با توجه به نمودار دو تابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ می‌توان به نتایج زیر رسید:

$$x\to\frac{\pi}{۴}^+ : \sin x>\cos x \Rightarrow \sin x-\cos x>۰$$

$$x\to\frac{\pi}{۴}^- : \sin x<\cos x \Rightarrow \sin x-\cos x<۰$$

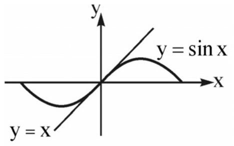
با توجه به نکته‌ی فوق می‌توان حد موردنظر را محاسبه نمود:

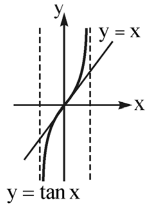
$$۲\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^+}f(\sin x-\cos x)-\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^-}f(\sin x-\cos x)=۲\lim_{x\to ۰^+}f(x)-\lim_{x\to ۰^-}f(x)=۲\lim_{x\to ۰^+}(\frac{۳x^۲+|x|}{۲|x|})-\lim_{x\to ۰^-}(\frac{x^۲-۲|x|}{|x|})$$

$$=\lim_{x\to ۰^+}(\frac{۳x^۲+x}{x})-\lim_{x\to ۰^-}(\frac{x^۲+۲x}{-x})=\lim_{x\to ۰^+}(۳x+۱)+\lim_{x\to ۰^-}(x+۲)=۱+۲=۳$$

۳۳- گزینه‌ی «۱»

با توجه به مقایسه‌ی نمودارهای توابع $y = x$ ، $y = \sin x$ و $y = \tan x$ می‌توان به نتایج زیر رسید:





$$x \to 0^+ : \begin{cases} \sin x < x \\ x < \tan x \end{cases} \Longrightarrow \sin x < x < \tan x$$

$$x \to 0^- : \begin{cases} x < \sin x \\ \tan x < x \end{cases} \Longrightarrow \tan x < x < \sin x$$

در نتیجه:

$$2\lim_{x\to 0^+} f(\sin x - \tan x) - \lim_{x\to 0^-} f(\sin x - \tan x) = 2\lim_{x\to 0^-} f(x) - \lim_{x\to 0^+} f(x)$$
$$= \lim_{x\to 0^-} 2(\tan \pi x - 2\cos x) - \lim_{x\to 0^+} (\sin \pi x - \cos x) = -4 + 1 = -3$$

۳۴- گزینه‌ی «۳»

$$\lim_{x\to 0^+} f(f(f(\sin x - \tan x))) = f(f(f(0^-))) = f(f(-1)) = f(2) = 1$$

دقت کنید هنگامی که $x \to 0^+$ داریم $\sin x < x < \tan x$. پس در $x \to 0^+$ نامساوی $\sin x < \tan x$ و در نتیجه $\sin x - \tan x < 0$ برقرار است.

۳۵- گزینه‌ی «۳»

در تابع $\frac{g}{f}$ چون $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ ، حد راست وجود ندارد. پس در کل حد ندارد.

در تابع $(f+g)(x) = \begin{cases} \sin^2 2x - 1 & x \geq 0 \\ \cos^2 3x + 2x & x < 0 \end{cases}$، چون $\lim\limits_{x\to 0^+}(f+g)(x) = -1$ و $\lim\limits_{x\to 0^-}(f+g)(x) = 1$ است، حد وجود ندارد.

در تابع $(f-g)(x) = \begin{cases} \sin^2 2x + 1 & x \geq 0 \\ \cos^2 3x - 2x & x < 0 \end{cases}$، چون $\lim\limits_{x\to 0^-}(f-g)(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(f-g)(x) = 1$ تابع در نقطه‌ی صفر دارای حد است.

در تابع $(f\cdot g)(x) = \begin{cases} -\sin^2 2x & x \geq 0 \\ 2x\cos^2 3x & x < 0 \end{cases}$، چون $\lim\limits_{x\to 0^-}(f\cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(f\cdot g)(x) = 0$ تابع در نقطه‌ی صفر دارای حد است.

بنابراین دو تابع $f - g$ و $f \cdot g$ در نقطه‌ی صفر حد دارند.

۳۶- گزینه‌ی «۲»

در ۱ داریم: $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\log x} = \lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{\log x} = 0$

در ۲ داریم: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ ✓

در ۳ داریم: $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\sin(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{\sin(x-1)} = 0$

در ۴ داریم: $\lim\limits_{x\to 1} 2^{x-1} = 2^0 = 1$

۳۷- گزینه‌ی «۲»

در ۱ داریم: $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\sin x - \tan x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{\sin x - \tan x} = 0$

در ۲ برای محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-1-\sqrt{x-1}}$ ابتدا دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{x-1-\sqrt{x-1}}$ را می‌یابیم.

$$\begin{cases} x-1-\sqrt{x-1} \geq 0 \Longrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}-1) \geq 0 \Longrightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \Longrightarrow x = 1 \quad \text{قابل قبول} \\ \sqrt{x-1}-1 \geq 0 \Longrightarrow x-1 \geq 1 \Longrightarrow x \geq 2 \end{cases} \\ x-1 \geq 0 \Longrightarrow x \geq 1 \end{cases}$$

از اشتراک بازه‌ها خواهیم داشت $D_f = [2,+\infty) \cup \{1\}$. پس تابع در نقطه‌ی $x = 1$ مقدار دارد ولی حد ندارد. زیرا در سمت چپ و راست نقطه‌ی $x = 1$ تابع تعریف نشده است.

در ۳ می‌دانیم لگاریتم عدد یک به هر مبنایی برابر صفر است. پس:

$$\lim_{x\to 1^+} \log_x 1 = \lim_{x\to 1^-} \log_x 1 = 0$$

در ۴ ابتدا دامنه‌ی تابع را می‌یابیم:

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x>0 \\ x\neq 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = (0,+\infty)-\{1\}$$

پس:

$$\lim_{x\to 0} \log_x (x+1) = \lim_{x\to 0^+} \log_x (x+1) = 0$$

۳۸- گزینه‌ی «۳»

چون تابع f در نقطه‌ی $x=1$ و تابع g در نقطه‌ی $x=2$ دارای حد هستند، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3-1=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = a+b \end{cases} \Rightarrow a+b=2$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = 2a-4 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = 4+2b \end{cases} \Rightarrow 2a-4=4+2b \Rightarrow 2a-2b=8 \Rightarrow a-b=4$$

حال با حل دستگاه دو معادله، دو مجهول $\begin{cases} a+b=2 \\ a-b=4 \end{cases}$ می‌توان نوشت $a=3$ و $b=-1$.

با توجه به مقادیر محاسبه‌شده، هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (\frac{ax}{2}+b) = \frac{9}{2}-1=\frac{7}{2} \\ \lim\limits_{x\to 3^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (2x-a) = 6-3=3 \end{cases}$$

۲ $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (2ax+3b) = 18-3=15 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (ax^2+bx) = 27-3=24 \end{cases}$$

۳ $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (ax+bx) = 9-3=6 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} |bx-a| = |-3-3|=6 \end{cases}$$

۴ $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (2ax+|x|) = 18+3=21 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (2ax+bx) = 18-3=15 \end{cases}$$

همان‌طور که از محاسبات فوق برمی‌آید فقط تابع ۳ در نقطه‌ی $x=3$ دارای حد است.