پاسخ‌های تشریحی
فصل ۱

۱- گزینه‌ی «۴»

> در **دنباله‌ی حسابی (عددی)** با جمله اول $a_۱$ و قدرنسبت d جملات به فرم زیر است:
>
> $$\underbrace{a_۱}_{\text{جمله‌ی اول }(a_۱)}\ ,\ \underbrace{a_۱+d}_{\text{جمله‌ی دوم }(a_۲)}\ ,\ \underbrace{a_۱+۲d}_{\text{جمله‌ی سوم }(a_۳)}\ ,\ \underbrace{a_۱+۳d}_{\text{جمله‌ی چهارم }(a_۴)}\ ,\ \dots\ ,\ \underbrace{a_۱+(n-۱)d}_{\text{جمله‌ی }n\text{اُم }(a_n)}\ ,\ \underbrace{a_۱+nd}_{\text{جمله‌ی }(n+۱)\text{اُم }(a_{n+۱})}\ ,\ \dots$$
>
> بنابراین **جمله عمومی** دنباله (یا همان جمله‌ی nاُم) برابر است با: $a_n=a_۱+(n-۱)d$
>
> هم‌چنین **قدرنسبت** برابر است با: $d=a_۲-a_۱=a_۳-a_۲=a_۴-a_۳=\cdots=a_n-a_{n-۱}$

در دنباله‌ی حسابی $۲۵۲,۲۴۹,۲۴۶,\dots$ داریم: $\begin{cases}a_۱=۲۵۲\\a_۲=۲۴۹\end{cases}\Longrightarrow d=a_۲-a_۱=۲۴۹-۲۵۲=-۳$

حالا فرض کنیم جمله‌ی nاُم دنباله صفر باشد؛ پس:

$$a_n=۰\Longrightarrow a_۱+(n-۱)d=۰\Longrightarrow ۲۵۲+(n-۱)(-۳)=۰\Longrightarrow -۳n+۲۵۵=۰\Longrightarrow n=\frac{۲۵۵}{۳}=۸۵$$

۲- گزینه‌ی «۳»

بعضی از دوستان با انگیزه‌ی بالایی (!) به جای n عدد ۳ را قرار می‌دهند و ۴ را انتخاب می‌کنند. ولی اگر به جمله عمومی یک دنباله‌ی حسابی در حالت کلی دقت کنیم ($a_n=a_۱+(n-۱)d$)، می‌بینیم که یک چندجمله‌ای درجه‌اول برحسب n است؛ یعنی نمی‌تواند $n^۲$ داشته باشد. پس باید $n^۲$ حذف شود یعنی $k-۲=۰$ یا $k=۲$ که با جایگذاری در a_n داریم: $a_n=۴n+۳\Longrightarrow a_۳=۴\times۳+۳=۱۵$

۳- گزینه‌ی «۴»

راه اول:

$$d=a_۲-a_۱=(\frac{۲}{\sqrt{۵}-۱}\times۲+\cancel{\frac{۵}{\sqrt{۲}-۱}})-(\frac{۲}{\sqrt{۵}-۱}\times۱+\cancel{\frac{۵}{\sqrt{۲}-۱}})=\frac{۲}{\sqrt{۵}-۱}=\frac{۲}{\sqrt{۵}-۱}\times\frac{\sqrt{۵}+۱}{\sqrt{۵}+۱}=\frac{۲(\sqrt{۵}+۱)}{۵-۱}$$

$$=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}=\frac{\sqrt{۵}}{۲}+\frac{۱}{۲}=\sqrt{\frac{۵}{۴}}+\frac{۱}{۲}=۰/۵+\sqrt{۱/۲۵}$$

> در هر دنباله‌ی حسابی **ضریب** n **در جمله عمومی** دنباله، برابر **قدرنسبت** است. زیرا:
>
> $a_n=a_۱+(n-۱)d=dn+(a_۱-d)$

راه دوم: $\text{ضریب } n=d=\frac{۲}{\sqrt{۵}-۱}\xrightarrow{\text{مانند راه اول}}d=۰/۵+\sqrt{۱/۲۵}$

۴- گزینه‌ی «۲»

> اگر a,b,c سه جمله‌ی **متوالی** یک دنباله‌ی **حسابی** باشند، b را **واسطه‌ی حسابی (عددی)** اعداد a و c می‌گوییم و همواره داریم: $b=\frac{a+c}{۲}$
>
> زیرا می‌دانیم: $\begin{cases}d=b-a\\d=c-b\end{cases}\Longrightarrow b-a=c-b\Longrightarrow ۲b=a+c\Longrightarrow b=\frac{a+c}{۲}$

$$-۱۲۰,x,-۱۱۲,\ldots \Rightarrow x=\frac{(-۱۲۰)+(-۱۱۲)}{۲}=\frac{-۲۳۲}{۲}=-۱۱۶ \Rightarrow d=x-(-۱۲۰)=-۱۱۶-(-۱۲۰)=۴$$

$$\xrightarrow{a_n=a_۱+(n-۱)d} a_n=-۱۲۰+(n-۱)(۴) \Rightarrow a_n=۴n-۱۲۴ \xrightarrow{a_n<۰} ۴n-۱۲۴<۰ \Rightarrow ۴n<۱۲۴ \Rightarrow n<۳۱$$

بنابراین جملات اول تا سی‌اُم دنباله منفی هستند.

۵- گزینه‌ی «۳»

$$\underbrace{۳x-۱}_{a},\underbrace{۲x+۳}_{b},\underbrace{۴x+۱}_{c},\ldots \xrightarrow{b=\frac{a+c}{۲}\ \text{باید}} ۲x+۳=\frac{(۳x-۱)+(۴x+۱)}{۲} \Rightarrow ۲(۲x+۳)=۷x$$

$$\Rightarrow ۴x+۶=۷x \Rightarrow ۳x=۶ \Rightarrow x=۲ \xrightarrow{\text{جایگذاری در دنباله}} ۵,۷,۹,\ldots$$

بنابراین $a_۱=۵$ و $d=۲$ و طبق $a_n=a_۱+(n-۱)d$ داریم: $a_n=۵+(n-۱)(۲) \Rightarrow a_n=۲n+۳ \Rightarrow a_{۴۱}=۲\times۴۱+۳=۸۵$

۶- گزینه‌ی «۱»

$$\begin{cases} a_۲+a_۴=\dfrac{a_۸}{۲} \Rightarrow (a_۱+d)+(a_۱+۳d)=\dfrac{a_۱+۷d}{۲} \xrightarrow{\times۲} ۴a_۱+۸d=a_۱+۷d \Rightarrow -۳a_۱=d \quad ✪ \\ a_۳a_۴=۴۰ \Rightarrow (a_۱+۲d)(a_۱+۳d)=۴۰ \xrightarrow{✪} \underbrace{(a_۱+۲(-۳a_۱))(a_۱+۳(-۳a_۱))}_{۴۰a_۱^۲}=۴۰ \Rightarrow a_۱^۲=۱ \Rightarrow a_۱=\pm۱ \end{cases}$$

که می‌بینیم فقط ۱- در گزینه‌ها آمده است.

۷- گزینه‌ی «۴»

$$a_n+a_k=a_{n-۱}+۲a_{k-۱} \Rightarrow a_n-a_{n-۱}=۲a_{k-۱}-a_k \Rightarrow d=۲(a_۱+(k-۲)d)-(a_۱+(k-۱)d)$$

$$\Rightarrow d=۲a_۱+۲kd-۴d-a_۱-kd+d \Rightarrow d=a_۱+kd-۳d \Rightarrow ۴d=a_۱+kd \Rightarrow ۴d=a_{k+۱} \Rightarrow \frac{d}{a_{k+۱}}=\frac{۱}{۴}$$

۸- گزینه‌ی «۳»

اگر بخواهیم بین اعداد a و b تعداد m عدد درج کنیم به‌گونه‌ای که اعداد حاصل، عضوهای یک دنباله‌ی حسابی باشند، **قدرنسبت** برابر است با:

$$d=\frac{b-a}{m+۱}$$

زیرا: $a,\underbrace{\boxed{a+d},\boxed{a+۲d},\boxed{a+۳d},\ldots,\boxed{a+md}}_{\text{m واسطه‌ی حسابی}},b \xrightarrow{\text{باید}} (a+md)+d=b \Rightarrow (m+۱)d=b-a \Rightarrow d=\dfrac{b-a}{m+۱}$

$$d=\frac{۸۴-۱۲}{۱۱+۱}=\frac{۷۲}{۱۲}=۶$$

۹- گزینه‌ی «۳»

در هر دنباله‌ی حسابی اگر $p,q,r,s\in\mathbb{N}$ باشد، آن‌گاه داریم: $(p+q=r+s) \Rightarrow a_p+a_q=a_r+a_s$

زیرا: $\begin{cases} a_p+a_q=(a_۱+(p-۱)d)+(a_۱+(q-۱)d)=۲a_۱+(p+q-۲)d \\ a_r+a_s=(a_۱+(r-۱)d)+(a_۱+(s-۱)d)=۲a_۱+(r+s-۲)d \end{cases} \xrightarrow{p+q=r+s} a_p+a_q=a_r+a_s$

بنابراین اگر **جمع اندیس‌های** دو جمله با جمع اندیس‌های دو جمله‌ی دیگر برابر باشد، آن‌گاه **مجموع جملات** متناظر با این اندیس‌ها با هم برابر هستند.

$$۱۹+۱۱=۱۷+۱۳ \Rightarrow a_{۱۹}+a_{۱۱}=a_{۱۷}+a_{۱۳}$$

۱۰- گزینه‌ی «۱»

در هر دنباله‌ی حسابی، داریم: $a_r-a_s=(r-s)d$

زیرا: $a_r-a_s=(\cancel{a_۱}+(r-۱)d)-(\cancel{a_۱}+(s-۱)d)=rd-\cancel{d}-sd+\cancel{d}=(r-s)d$

$$\begin{cases} a_{p+q}-a_p=(p+q-p)d=qd \Longrightarrow x-a_p=qd \quad ✪ \\ a_{p+q}-a_{p-q}=((p+q)-(p-q))d=۲qd \Longrightarrow x-y=۲qd \xrightarrow{✪} x-y=۲(x-a_p) \Longrightarrow ۲a_p=x+y \Longrightarrow a_p=\frac{x+y}{۲} \end{cases}$$

۱۱- گزینه‌ی «۲»

اعداد مضرب ۳ به فرم ۳n هستند. اگر این اعداد را a_n فرض کنیم، می‌توان گفت $a_n-۲=۳n$ یا $a_n=۳n+۲$ ولی این اعداد باید دو رقمی باشند پس داریم:

$$۱۰\le a_n\le ۹۹ \Longrightarrow ۱۰\le ۳n+۲\le ۹۹ \xrightarrow{-۲} ۸\le ۳n\le ۹۷ \Longrightarrow \frac{۸}{۳}\le n\le \frac{۹۷}{۳} \Longrightarrow ۲/\cdots \le n\le ۳۲/\cdots$$

$$\xrightarrow{n\in \mathbb{N}} n=۳,۴,۵,\ldots,۳۲ \Longrightarrow \text{تعداد}=۳۰$$

۱۲- گزینه‌ی «۳»

راه اول: فرض کنیم قدرنسبت دنباله‌ی اصلی d باشد؛ پس چهارجمله‌ی اول به صورت $\underbrace{a_۱+۳d}_{a_۴}$, $\underbrace{a_۱+۲d}_{a_۳}$, $\underbrace{a_۱+d}_{a_۲}$, $\underbrace{a_۱}_{a_۱}$ هستند که با جایگذاری آن‌ها در قسمت‌های داده شده، به راحتی به جواب می‌رسیم:

الف $۲a_۱+a_۳\ ,\ ۳a_۲\ ,\ a_۱+۲a_۳ \Longrightarrow ۳a_۱+۲d\ ,\ ۳a_۱+۳d\ ,\ ۳a_۱+۴d \Longrightarrow$ اختلاف دو جمله‌ی متوالی $=d$ ✓

برای ب و ج نیز به راحتی قابل بررسی است (ب هست ولی ج نیست).

راه دوم: به جای $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$ و $a_۴$ اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ را که چهار جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی با $d=۱$ هستند، قرار می‌دهیم. پس:

الف : ۵,۶,۷ ✓ ب : ۹,۱۰,۱۱ ✓ ج : ۶,۵,۱۲ ✗

۱۳- گزینه‌ی «۲»

مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی با جمله اول $a_۱$ و قدرنسبت d با فرمول‌های زیر به دست می‌آید:

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)=\frac{n}{۲}(a_۱+(a_۱+(n-۱)d)=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)=na_۱+\frac{n(n-۱)}{۲}d$$

زیرا:

$$\begin{cases} S_n=a_۱+a_۲+\cdots+a_{n-۱}+a_n \\ S_n=a_n+a_{n-۱}+\cdots+a_۲+a_۱ \end{cases} \xrightarrow{\oplus} ۲S_n=(a_۱+a_n)+(a_۲+a_{n-۱})+\cdots+(a_{n-۱}+a_۲)+(a_n+a_۱) \quad ✪$$

حالا چون جمع اندیس‌ها در همه‌ی پرانتزها برابر است، داریم:

$$a_۱+a_n=a_۲+a_{n-۱}=a_۳+a_{n-۲}=\cdots$$

پس در ✪ داریم:

$$۲S_n=\underbrace{(a_۱+a_n)+(a_۱+a_n)+\cdots+(a_۱+a_n)+(a_۱+a_n)}_{n\text{تا پرانتز}} \Longrightarrow ۲S_n=n(a_۱+a_n) \Longrightarrow S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$$

حالا اگر در این فرمول به جای a_n مقدار $a_۱+(n-۱)d$ قرار دهیم، به فرمول‌های بعدی می‌رسیم (این روش اثبات را دانشمندی به نام گاوس بـه کـار برده‌است).

$$۱+۲+۳+\cdots+n=۵۵ \Longrightarrow \frac{n}{۲}(\underset{a_۱}{۱}+\underset{a_n}{n})=۵۵ \xrightarrow{\times ۲} n(n+۱)=۱۱۰ \xrightarrow{n(n+۱)=۱۰\times ۱۱} n=۱۰$$

۱۴- گزینه‌ی «۲»

فرض کنیم مجموع n جمله‌ی اول برابر ۲۴۰ باشد. پس:

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)=۲۴۰ \Longrightarrow \frac{n}{۲}(۲(-۲)+(n-۱)(۴))=۲۴۰ \Longrightarrow \frac{n}{۲}(-۴+۴n-۴)=۲۴۰ \Longrightarrow \frac{n}{۲}(۴n-۸)=۲۴۰$$

$$\Longrightarrow n(n-۲)=۱۲۰ \xrightarrow{n(n-۲)=۱۲\times ۱۰} n=۱۲$$